

5. FOLGE, 1931, BAND 11, HEFT 3

QC
1

A613

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 403. Band

Kuratorium:

F. Paschen M. Planck R. Pohl
A. Sommerfeld M. Wien

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Im Jahre 1931 erscheinen die Bände 8, 9, 10 u. 11 mit je 8 Hefen. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 28.— zuzüglich Rm. 1.60 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 2.— für das Ausland. Redaktionsschluß am 29. September 1931.

Inhalt

	Seite
A. Sommerfeld-München, Über die Beugung und Bremsung der Elektronen. (Mit 12 Figuren)	257
Bruno Claus-Halle a. d. S., Über den Gleichrichtereffekt und über Leuchterscheinungen an Carborundkristallen. (Mit 16 Figuren)	331
Gerhard Schneider-Tübingen, Auslösung von Sekundärelektronen durch Wasserstoffkanalstrahlen in Metallen. (Mit 14 Figuren)	357

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grünelsen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekanntgegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Den zur Veröffentlichung eingereichten Abhandlungen ist die Mitteilung beizufügen, daß eine Publikation an anderer Stelle nicht erfolgt ist.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, welches jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

y
t
s
a
-
e
l-
st
t.
t-
t.
en
u-
en
au
tel
ta-

A

5.

Ü

der
I. T
von
zu
bre
Pol
der
der
mul
Ret
ver

Be

§ 1

Ele
mec
am
des
was
Hel
eige
Beu
die
Z +
aber

(einf

A

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1931, BAND 11, HEFT 3

Über die Beugung und Bremsung der Elektronen

Von A. Sommerfeld

(Mit 12 Figuren)

Übersicht: Der I. Teil bildet eine systematische Einleitung zu der Behandlung des kontinuierlichen Röntgenspektrums im II. Teil. Der I. Teil geht nur in der Methode, nicht in den Resultaten über die Arbeiten von Gordon, Mott, Temple hinaus. Der II. Teil setzt, im Gegensatz zu Arbeiten von Oppenheimer und Sugiura den Endzustand des gebremsten Elektrons als ebene, durch Beugung modifizierte Welle an. Polarisation und Intensität im kontinuierlichen Spektrum werden nach der Methode der Matrixelemente berechnet. Um die azimutale Verteilung der Intensität, insbesondere die Voreilung des Maximums zu erhalten, muß die Rechenmethode verfeinert werden durch Berücksichtigung der Retardierung. Die Resultate werden mit Messungen von Kulenkampff verglichen.

I. Teil:

Beugung von Korpuskularstrahlen am einzelnen Atom bzw. Kern

§ 1. Formulierung des Beugungsproblems. Endlicher Bereich

Die Beeinflussung (Beugung, Bindung, Bremsung) eines Elektrons durch ein Atom von n Elektronen bedeutet wellenmechanisch ein Problem von $n + 1$ Elektronen. Die Beugung am reinen Kern ($n = 0$) führt also auf die Eigenfunktionen des Wasserstoffes, die Beugung an einem Wasserstoff- oder wasserstoffähnlichen Atom auf die Eigenfunktionen des Heliums¹⁾, die Beugung an Heliumatomen auf die Lithium-eigenfunktionen usw. Natürlich handelt es sich, bei der Beugung am neutralen Atom der Ordnungszahl Z , nicht um die Eigenfunktionen des neutralen Atoms der Ordnungszahl $Z + 1$, sondern um die des negativen Ions ($Z + 1$ Elektronen, aber Kernladung Z).

1) Bei dieser Auffassung wird die Möglichkeit des Austausches (einfallendes Elektron gegen Atomelektron) von selbst berücksichtigt.

Statt einer einfallenden ebenen Elektronenwelle betrachten wir zunächst eine im Endlichen gelegene Quelle von Elektronenwellen, also eine *punktförmige Glühkathode*; der Grenzübergang zur ebenen Welle kann nachträglich wie in der Optik geschehen. Der Energieparameter E des Gesamtsystems ist gegeben, nämlich gleich der kinetischen Energie des Elektrons in großem Abstände vom Atom, vermehrt (in Wirklichkeit vermindert) um die Energie des Atoms im ursprünglichen Zustande. Beim reinen Kern wird die Atomenergie gleich Null gesetzt, so daß E gleich der kinetischen Energie des Elektrons in großem Kernabstände wird; bei der Beugung am Wasserstoffatom im Grundzustande ergibt sich E aus der Voltenergie des auffallenden Elektrons durch Subtraktion von 13,5 Volt usw.

Da die Energie somit gegeben ist, handelt es sich um ein Problem der *erzwungenen*, nicht der *freien* Schwingungen. Man kann aber die Behandlung irgendeines Problems erzwungener Schwingungen mit Hilfe der Greenschen Funktion¹⁾ auf die zugehörigen freien Schwingungen zurückführen.

Als äußerste Vereinfachung des Elektronenproblems ziehen wir auch den Fall „Kernladung Null“ heran, in dem also überhaupt keine Beugung stattfindet. Wir sprechen dann von dem „akustischen Falle“.

Wir betrachten zunächst ein im Endlichen begrenztes Gebiet G , etwa mit der provisorischen Randbedingung $\psi = 0$. Die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen lautet:

$$(1) \quad \Delta \psi + k^2 \psi = 0.$$

Hier ist k im akustischen Fall eine Konstante, die der Frequenz der erzwungenen Schwingungen entspricht. In der Wellenmechanik hat man für das Ein-Elektronenproblem (also für den reinen Kern als Beugungszentrum) k^2 zu ersetzen durch

$$(2) \quad K^2 = k^2 + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{Ze^2}{r}, \quad k^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} E,$$

E = Gesamtenergie = kinetische Energie des Elektrons für große Abstände (vgl. oben), Ze = Kernladung, r = Abstand vom Kern. Handelt es sich um die Beugung an einem von

1) Vgl. A. Sommerfeld, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 21. S. 309. 1912; sowie Physikal. Ztschr. 11. S. 1057. 1910.

Elektronen umgebenen Kern, so wird die Differentialgleichung (1) mehrdimensional und der Ausdruck (2) ist zu vervollständigen durch die Wechselwirkung zwischen Kern- und Atomelektronen, zwischen Atomelektronen untereinander sowie durch die Wechselwirkung zwischen jenen und dem Außenelektron.

Die Eigenfunktionen ψ_r , d. h. die freien Schwingungen genügen im akustischen Falle der Differentialgleichung

$$(3) \quad \Delta \psi_r + k_r^2 \psi_r = 0$$

mit konstantem k_r . Im Ein-Elektronenproblem ist k_r , wie in Gl. (2), zu ersetzen durch

$$(4) \quad K_r^2 = k_r^2 + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} \frac{Ze^2}{r}, \quad k_r^2 = \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} E_r.$$

E_r = Eigenwert oder Eigenenergie. Ersichtlich hat man

$$(5) \quad K^2 - K_r^2 = k^2 - k_r^2.$$

Die fragliche Darstellung der erzwungenen Schwingung ψ durch die Eigenfunktionen ψ_r lautet dann (die ψ_r sind auf 1 normiert):

$$(6) \quad \psi = \sum_r \frac{\psi_r^*(Q) \psi_r(P)}{k^2 - k_r^2}.$$

Hier bedeutet Q den *Quellpunkt*, P den *Aufpunkt*, für den ψ berechnet werden soll. ψ_r^* ist die zu ψ_r komplex konjugierte Eigenfunktion. Wegen des Beweises vgl. Note 1 am Schluß der Arbeit. Gl. (6) ist in der Theorie der Integralgleichungen bekannt als Bilinearformel¹⁾; sie stellt die „Green-sche Funktion“ für unser Gebiet G dar.

Ist das Problem wie im akustischen und Ein-Elektronen-falle „separierbar“, so zerlegt sich die Summation nach r in drei einfache Summen, die nach den auf die drei Koordinaten bezüglichen Indizes zu nehmen sind.

§ 2. Unendliches Gebiet, Wahl des Integrationsweges

Wenn das Gebiet G unendlich wird, so rücken die Eigenwerte (zum Teil) kontinuierlich aneinander und von den in (6) zusammengefaßten Summationen geht eine oder mehrere in eine Integration über. An die Stelle unserer früheren Randbedingung tritt im Unendlichen die „Ausstrahlungsbedingung“,

1) Vgl. Courant-Hilbert, *Meth. d. Math. Phys.* 1. S. 117.

die ich früher (Jahresbericht, a. a. O.) ausführlich diskutiert habe. Die Bedingung besagt, kurz gesprochen, daß die Funktion ψ sich im Unendlichen wie eine *divergierende* Welle, also wie

$$(7) \quad \frac{1}{r} e^{ikr}, \text{ nicht wie } \frac{1}{r} e^{-ikr} \text{ oder } \frac{1}{r} \frac{\cos kr}{\sin kr}$$

verhalten soll. Der Zeitfaktor ist dabei, was bequem ist, in der Form $\exp.(-i\omega t)$ gedacht. Vgl. Note 2.

Man erfüllt die Ausstrahlungsbedingung durch die *Wahl des Integrationsweges*. Wir zeigen dies zunächst im akustischen Falle und benutzen Polarkoordinaten r, ϑ, φ . Der Punkt $r=0$ sei ein beliebiger Punkt O , der im Ein-Elektronenfalle den Ort des Kernes bedeuten wird. Das Gebiet G , nämlich der unbegrenzte Raum, ist nur in Richtung der Koordinate r unendlich, im Sinne der Koordinaten ϑ, φ aber von endlicher Ausdehnung (π oder 2π). Deshalb werden nur die radialen Eigenwerte kontinuierlich, die angularen bleiben diskret. Erstere messen wir durch die Integrationsvariable ϱ , letztere werden durch die Summationsindizes l und m unterschieden. Statt des einen Index r haben wir daher zur vollständigen Bezeichnung der einzelnen Eigenfunktion drei Indizes ϱ, l, m zu benutzen, nämlich:

$$(8) \quad \psi_{\varrho, l, m} = \chi_l(\varrho r) P_l^m(\cos \vartheta) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi}.$$

Dabei ist, bis auf einen Normierungsfaktor, wenn wir das Argument allgemein mit u bezeichnen und wenn I_ν die Besselsche Funktion vom Index ν bedeutet:

$$(9) \quad \chi_l(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2u}} I_{l + \frac{1}{2}}(u) = \chi_l^*(u)$$

und insbesondere

$$(10) \quad \chi_0(u) = \frac{\sin u}{u}.$$

Aus den Eigenfunktionen (8) bauen wir nun nach dem Schema von (6) die Greensche Funktion des unendlichen Gebietes (die erzwungene Schwingung) auf:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi &= \int_0^\infty \frac{d\varrho}{k^2 - \varrho^2} \sum_{l, m} \chi_l(\varrho r_0) \chi_l(\varrho r) \sum_m P_l^m(\cos \vartheta_0) \\ &\quad \cdot P_l^m(\cos \vartheta) \cos m(\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \right.$$

Hier sind $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$ die Polarkoordinaten des Quellpunktes Q . Die x und P sind einzeln als normiert zu denken, wobei die Normierung von $\cos m(\varphi - \varphi_0)$ in die von P aufgenommen sei. Daß die limitäre Dichte der Eigenwerte bei der von uns zu wählenden Normierung gerade durch den Faktor $d\varrho$ im Zähler von (11) wiedergegeben wird, bedarf eines genaueren Beweises (vgl. Note 3).

Wir können uns das Koordinatensystem so gewählt denken, daß ϑ_0 Null oder π wird. Dann verschwinden alle $P_l^m(\cos \vartheta_0)$ für $m > 0$ und es entsteht eine Formel mit einfacher Summation nach l (P_l bedeutet die gewöhnliche zonale, hier aber auf 1 normierte Kugelfunktion):

$$(11a) \quad \psi = \int_0^\infty \frac{d\varrho}{k^2 - \varrho^2} \sum_l x_l(\varrho r_0) x_l(\varrho r) P_l(\pm 1) P_l(\cos \vartheta).$$

Bezüglich des Integrationsweges nach ϱ werde nun festgesetzt, daß er durch Fig. 1 gegeben sei: der Weg soll in der komplexen ϱ -Ebene, von 0 bis ∞ verlaufend, den singulären Punkt $\varrho = k$ zur Linken lassen. Diese Festsetzung wurde früher a. a. O. durch einen Grenzübergang vom endlichen, kugelförmig begrenzten Gebiet her begründet; sie wird in Note 4 verifiziert werden.

§ 3. Ausführung der Integration

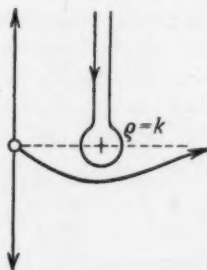
Zur Ausführung der Integration nach ϱ im akustischen Falle erinnern wir an die Formel

$$I_{l+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(H_{l+\frac{1}{2}}^1 + H_{l+\frac{1}{2}}^2 \right),$$

unter H^1, H^2 die beiden Hankelschen Funktionen verstanden, und schreiben entsprechend, vgl. (9):

$$(12) \quad \begin{cases} x_l = \frac{1}{2}(x_l^1 + x_l^2), \\ x_l^{1,2}(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2u}} H_{l+\frac{1}{2}}^{1,2}(u), \end{cases}$$

wobei der Normierungsfaktor in (12) vorläufig unterdrückt ist.



Integrationsweg für das kontinuierliche Spektrum, mit Rücksicht auf die Ausstrahlungsbedingung

Fig. 1

Aus der bekannten asymptotischen Darstellung der $H^{1,2}$ folgt für $u \rightarrow \infty$

$$(12a) \quad \begin{cases} \chi_i^{1,2}(u) = \frac{1}{u} e^{\pm i \left(u - \frac{l+1}{2} \pi\right)}, \\ \chi_i(u) = \frac{1}{2u} \left\{ e^{i \left(u - \frac{l+1}{2} \pi\right)} + e^{-i \left(u - \frac{l+1}{2} \pi\right)} \right\}. \end{cases}$$

Ist nun $r_0 > r$, so entscheidet über das Verhalten des Produktes $\chi_l(\varrho r_0) \chi_l(\varrho r)$ im Unendlichen der ϱ -Ebene der erste der beiden Faktoren. Für diesen benutzen wir Gl. (12) und schreiben

$$\chi_l(\varrho r_0) \chi_l(\varrho r) = \frac{1}{2} \chi_l^1(\varrho r_0) \chi_l(\varrho r) + \frac{1}{2} \chi_l^2(\varrho r_0) \chi_l(\varrho r).$$

Dann verschwindet nach (12a) der erste bzw. der zweite der beiden Summanden im Unendlichen der positiv- bzw. negativ-imaginären Halbebene. Infolgedessen deformieren wir, vgl. Fig. 1, in dem ersten Summanden den Integrationsweg nach der positiven Seite, wobei er in die positiv-imaginäre Achse und die Schleife um $\varrho = k$ übergeht; der Integrationsweg im zweiten Summanden wird nach der negativen Seite, d. h. in die negativ-imaginäre Achse deformiert. In der Summe heben sich die beiden Integrale über die entgegengesetzt durchlaufenen imaginären Halbachsen auf (Note 5); es bleibt nur das Integral des ersten Summanden über die Schleife übrig, welches nach Cauchy gibt:

$$\frac{1}{2} \int \frac{d\varrho}{k^2 - \varrho^2} \chi_l^1(\varrho r_0) \chi_l(\varrho r) = \frac{1}{2} \frac{2\pi i}{(-2k)} \chi_l^1(k r_0) \chi_l(k r).$$

Daraus folgt als ausintegrierte Form von (11a) für $r_0 > r$:

$$(13) \quad \psi = -\frac{\pi i}{2k} \sum_l \chi_l^1(k r_0) \chi_l(k r) P_l(\pm 1) P_l(\cos \vartheta).$$

Ebenso ergibt sich für $r > r_0$ offenbar:

$$(13a) \quad \psi = -\frac{\pi i}{2k} \sum_l \chi_l^1(k r) \chi_l(k r_0) P_l(\pm 1) P_l(\cos \vartheta).$$

Diese Ausdrücke können im akustischen Falle nichts anderes sein als die Darstellung der vom Punkte Q ausgehenden Kugelwelle, also nach Gl. (E) in Note 1 die Funktion

$$(14) \quad -\frac{e^{ikR}}{4\pi R}, \quad R^2 = r^2 + r_0^2 \mp 2rr_0 \cos \vartheta.$$

Wir gehen zur Grenze $Q \rightarrow \infty$, d. h. $r_0 \rightarrow \infty$ über. Mit $\vartheta_0 = \pi$ und $x = r \cos \vartheta$ folgt aus (14)

$$(15) \quad -\frac{e^{ikr_0}}{4\pi r_0} e^{ikx} = -\frac{1}{4\pi A} e^{ikx}, \quad A = r_0 e^{-ikr_0}.$$

Der Vergleich mit (13) liefert

$$(16) \quad e^{ikx} = \frac{2\pi^2 i}{k} \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \sum_l A \chi_l^1(kr_0) \chi_l(kr) P_l(-1) P_l(\cos \vartheta).$$

§ 4. Normierungsfragen

Die gewöhnliche Normierung der Kugelfunktionen geschieht bekanntlich so, daß $P_l(1) = 1$, $P_l(-1) = (-1)^l$ wird. Da in dieser Normierung gilt

$$\int_{-1}^{+1} [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1}$$

und da wir den Normierungsfaktor für die φ -Koordinate (2π) in diejenigen für P aufnehmen wollten, haben wir, um zur gewöhnlichen Normierung überzugehen in (16) statt

$$P_l(-1) \cdot P_l(\cos \vartheta)$$

zu schreiben:

$$\frac{2l+1}{4\pi} P_l(-1) P_l(\cos \vartheta) = \frac{2l+1}{4\pi} (-1)^l P_l(\cos \vartheta).$$

Indem wir auch den Normierungsfaktor N_r der radialen Eigenfunktion in Evidenz setzen, erhalten wir aus (16)

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} e^{ikx} &= \frac{\pi i}{2k} \lim \sum_l (-1)^l (2l+1) N_r^2 \\ &\quad \cdot A \chi_l^1(kr_0) \chi_l(kr) P_l(\cos \vartheta). \end{aligned} \right.$$

Jetzt führen wir den Grenzübergang $r_0 \rightarrow \infty$ aus. Im akustischen Falle wollten wir χ_l direkt durch Gl. (9) gegeben denken; wir erhalten dann nach (12a) und (15)

$$(18) \quad \lim A \chi_l^1(kr_0) = \frac{1}{k} e^{-i(l+1)\frac{\pi}{2}}.$$

Für den Normierungsfaktor N_r findet man (vgl. unten) bei dieser Wahl von χ_l

$$(19) \quad N_r^2 = \frac{2k^2}{\pi}.$$

Durch Einsetzen von (18) und (19) in (17) folgt die wohl-bekannte Formel¹⁾:

$$(20) \quad e^{ikx} = \sum (2l+1) i^l \chi_l(kr) P_l(\cos \vartheta).$$

Wir behaupten aber, daß fast dieselbe Formel auch unser Beugungsproblem für den Ein-Elektronenfall exakt löst, vgl. § 5.

Zunächst tragen wir den Beweis der Normierungs-gleichung (19) nach.

Bekanntlich kann man im kontinuierlichen Spektrum aus Konvergenzgründen die Normierungsbedingung nicht in der Form

$$(21) \quad N_r^2 \int_0^\infty \chi_l^2(kr) r^2 dr = 1$$

ansetzen, sondern muß eine schwächere Bedingung benutzen.

E. Fues²⁾ hat, was am nächsten liegt, die Normierung pro Energieelement ΔE durchgeführt. Dies entspricht wegen $\Delta E = h \Delta \nu$, abgesehen von dem Faktor h , einem in der Skala der Schwingungszahlen aufgetragenen Spektrum. Statt dessen könnte man auch die Normierung auf das Wellenlängen-element $\Delta \lambda$ beziehen. Für unsere Zwecke ist aber die Normierung pro Wellenzahlelement Δk die gegebene. Wir setzen also fest:

$$(22) \quad N_r^2 \int_0^\infty r^2 dr \int_{k_1}^{k_2} \chi_l(kr) \chi_l(k'r) dk' = 1,$$

wobei das Intervall $\Delta k = k_2 - k_1$ den Wert k in sich schließen soll, so daß $k_2 > k > k_1$. Aus (22) folgt:

$$(23) \quad \frac{1}{N_r^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{k_1}^{k_2} K dk', \quad K = \int_0^R \chi_k \chi_{k'} r^2 dr;$$

hier ist die Bezeichnung $\chi_l(kr)$ in χ_k usw. abgekürzt. Nun genügen χ_k und $\chi_{k'}$ den aus der Wellengleichung unmittelbar folgenden Gleichungen:

1) Vgl. z. B. Riemann-Weber II. S. 492, Gl. (16), 7. Aufl.
2) E. Fues, Ann. d. Phys. 81. S. 281. 1926, speziell § 3.

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r \chi_k) + (k^2 + Q) \chi_k = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r \chi_{k'}) + (k'^2 + Q) \chi_{k'} = 0 \end{cases}$$

mit der Abkürzung

$$(24a) \quad Q = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{Ze^2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2},$$

die wir sogleich in der für den Elektronenfall verallgemeinerten Form hingeschrieben haben; im akustischen Fall ist natürlich $Z = 0$ zu setzen, also das erste Glied fortzulassen.

Indem man die erste Gl. (24) mit $\chi_{k'}$, die zweite mit χ_k multipliziert und diese von jener subtrahiert, ergibt sich in bekannter Weise (vgl. E. Fues, a. a. O.) durch Integration von 0 bis R

$$(25) \quad \begin{cases} (k'^2 - k^2) K = \int_0^R \left\{ r \chi_{k'} \frac{d^2}{dr^2} (r \chi_k) - r \chi_k \frac{d^2}{dr^2} (r \chi_{k'}) \right\} dr \\ = \int_0^R \frac{d}{dr} \left\{ r \chi_{k'} \frac{d}{dr} (r \chi_k) - r \chi_k \frac{d}{dr} (r \chi_{k'}) \right\} dr \\ = \left\{ r \chi_{k'} \frac{d}{dr} (r \chi_k) - r \chi_k \frac{d}{dr} (r \chi_{k'}) \right\}_{r=R}. \end{cases}$$

Dieser Wert kann aber unmittelbar aus (12a) abgelesen werden. Man erhält so

$$\begin{aligned} (k'^2 - k^2) K &= \frac{1}{k} \cos \left(kR - \frac{l+1}{2} \pi \right) \sin \left(k'R - \frac{l+1}{2} \pi \right) \\ &\quad - \frac{1}{k'} \cos \left(k'R - \frac{l+1}{2} \pi \right) \sin \left(kR - \frac{l+1}{2} \pi \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k'} \right) \sin [(k+k')R - (l+1)\pi] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} \right) \sin [(k'-k)R] \end{aligned}$$

und daher

$$(26) \quad K = \dots \frac{1}{2kk'} \frac{\sin (k' - k) R}{k' - k}.$$

Das durch ... angedeutete Glied, in dem sich der Faktor $k' - k$ heraushebt, interessiert uns nicht. Aus (23) folgt nun ($k' = k$ gesetzt):

$$(27) \quad \frac{1}{N^2} = \frac{1}{2k^2} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{k_1}^{k_2} \frac{\sin (k' - k) R}{k' - k} dk' = \frac{\pi}{2k^2}$$

Gl. (19) ist damit bewiesen.

§ 5. Übergang zum Ein-Elektronenproblem

Der Inhalt der beiden letzten Paragraphen läßt sich nun unmittelbar vom akustischen auf den Elektronenfall übertragen. Zunächst bleibt die Winkelabhängigkeit der Eigenfunktionen dieselbe wie im akustischen Falle, die radiale Abhängigkeit, d. h. der Ausdruck von χ_i , ist natürlich abzuändern. Aber es kommt der folgende Unterschied hinzu: Die Eigenwerte haben außer dem kontinuierlichen ein diskontinuierliches Spektrum. Da wir in (6) über das vollständige System der Eigenwerte zu summieren haben, so tritt zu dem *Integral* in (11) eine entsprechende *Summe* hinzu (vgl. Note 6). Diese Summe verschwindet aber beim Grenzübergange $r_0 \rightarrow \infty$, d. h. allemal dann, wenn der Quellpunkt außerhalb der Wirkungssphäre eines am Orte des Kerns gedachten Wasserstoffatoms sich befindet, da bekanntlich die diskontinuierlichen Eigenfunktionen für $r \rightarrow \infty$ exponentiell verschwinden. Wir können daher die fragliche Summe von vornherein unterdrücken, sofern es uns nur auf den Grenzfall $r_0 \rightarrow \infty$ ankommt.

Aber auch die Ausführung der Integration bleibt erhalten. Denn für unendlich große Werte des Argumentes geht die Differentialgleichung des Ein-Elektronenproblems in die des akustischen Problems über, so daß die Eigenfunktionen beider Probleme asymptotisch (bis auf einen langsam veränderlichen Faktor) übereinstimmen. Dies folgt direkt aus Gl. (2), welche für $r = \infty$ besagt, daß $K_r = k_r$, also im kontinuierlichen Spektrum $= \varrho$ wird. Daraufhin läßt sich die Integration nach ϱ , die ja wesentlich nur auf dem asymptotischen Verhalten der Eigenfunktionen χ beruhte, ganz im Sinne der Fig. 1 ausführen. Allerdings kompensieren sich dabei die Integrale über die beiden imaginären Halbachsen nicht, aber sie verschwinden für $Q \rightarrow \infty$ (Note 6), ebenso wie die Beiträge vom diskontinuierlichen Spektrum.

Insbesondere bleibt Gl. (16) erhalten, wobei natürlich *eiks* durch die gesuchte Funktion ψ der ebenen Welle im Elektronenproblem und χ_i durch die Eigenfunktionen des Wasserstoffs zu ersetzen ist. Über die Konstante A ist zu sagen, daß sie im wesentlichen durch Gl. (15) gegeben ist, welche Gleichung ja nur die triviale Tatsache ausdrückt, daß man, wie beim Grenzübergange $r_0 \rightarrow \infty$ in der gewöhnlichen Optik, Amplitude und

Phase in bestimmter Weise ins Unendliche wachsen lassen muß, um einen bestimmten Limes zu erhalten. Indem wir (15) etwas verallgemeinern, schreiben wir:

$$(28) \quad A = r_0 e^{-i(kr_0 + \alpha_0)}.$$

Über die uns freistehende Wahl der hier eingeführten Phase α_0 werden wir sogleich verfügen.

Wir haben uns nun über die Definition von χ_i schlüssig zu werden. Diese soll so gewählt werden, daß die asymptotische Darstellung der χ_i^1 , auf die es bei der Integration nach ϱ ankommt, derjenigen im akustischen Falle möglichst gleich wird.¹⁾ Aus der Differentialgleichung des Ein-Elektronenproblems liest man unmittelbar das folgende asymptotische Verhalten von χ^1 und χ^2 ab²⁾:

$$(29) \quad \chi_i^{1,2}(k, r) = \frac{C_{1,2}}{r} e^{\pm i(kr + a)}, \quad a = \frac{Z}{ka} \lg 2kr, \quad a = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}.$$

Die Schreibweise $\chi_i(k, r)$ soll andeuten, daß die jetzigen χ nicht mehr bloße Funktionen von kr sind, sondern vermöge a von k und r einzeln abhängen. Wir wählen nun im Anschluß an die asymptotische Darstellung der akustischen χ_i^1 in (12a) die Konstante C_1 folgenderweise

$$(30) \quad C_1 = \frac{1}{k} e^{-i\pi \frac{l+1}{2}}.$$

Aus (28) und (29) folgt dann, wenn wir α_0 gleich a an der Stelle r_0 setzen:

$$(31) \quad \lim_{r_0 \rightarrow \infty} A \chi_i^1(k, r_0) = \frac{1}{k} e^{-i(l+1) \frac{\pi}{2}}.$$

Das ist aber unsere frühere Formel (18). Daraus folgt weiter, daß unsere frühere Gleichung (20) auch die exakte Lösung unseres Ein-Elektronenproblems in sich enthält, sofern

1) Das hat zur Folge, daß unsere χ_i zunächst nicht „auf Eins“ normiert sind, wie es bei den allgemeinen Betrachtungen der Wellenmechanik vorausgesetzt wird. Die Normierung auf 1 geschieht dann nachträglich durch Hinzufügung des Faktors N_i aus Gl. (27).

2) Vgl. z. B. A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrall., Wellenmechanischer Ergänzungsband, S. 80, Gl. (24) und (24a).

wir unter den χ_i nicht die akustischen, sondern die Wasserstoff-Funktionen verstehen und den in ihnen noch willkürlichen (komplexen) Faktor so wählen (vgl. Note 7), daß der Bedingung (29), (30) genügt wird. Die fragliche Lösung des Ein-Elektronenproblems schreibt sich dann einfach

$$(32) \quad \psi = \sum (2l + 1) i^l \chi_l(k, r) P_l(\cos \vartheta).$$

§ 6. Einführung parabolischer Koordinaten Die Rutherford'sche Formel

Gl. (32) ist von W. Gordon¹⁾ und N. F. Mott²⁾ abgeleitet und zum Beweise der Rutherford'schen Formel für die α -Strahl-Beugung benutzt worden. Unsere Ableitung von (32) unterscheidet sich von derjenigen dieser Autoren wesentlich nur dadurch, daß wir die Ausstrahlungsbedingung von vornherein durch die Wahl unseres Integrationsweges nach ϱ erfüllen konnten.

G. Temple³⁾ bemerkt aber, daß nicht Polar-, sondern parabolische Koordinaten der Symmetrie unseres Problems angepaßt sind und daß in diesen Koordinaten die unendliche Summe (32) sich auf ein einziges Glied reduziert. Wir erkennen dies von unserem Standpunkte aus folgendermaßen.

Zunächst: Die Symmetrie unseres Ein-Elektronenproblems ist dieselbe wie die des Starkeffektes. Die Eigenfunktionen des Starkeffektes sind in parabolischen Koordinaten ξ, η, φ beim „Felde Null“:

$$(33) \quad \psi_r = f_1(\xi) f_2(\eta) \frac{\cos}{\sin} m \varphi.$$

Dabei haben f_1 und f_2 , wenn wir unter u eine Größe verstehen, die mit ξ bzw. η proportional ist, im *diskontinuierlichen* Spektrum die Form:

$$(34) \quad f = e^{-u/2} u^{m/2} \frac{d^m}{du^m} L_{m+n}(u).$$

1) W. Gordon, Ztschr. f. Phys. 48. S. 180. 1928.

2) N. F. Mott, Proc. R. Soc. 118. S. 542. 1928.

3) G. Temple, Proc. R. Soc. 121. S. 673. 1928. Vgl. auch die Schlußbemerkung bei W. Gordon, a. a. O.

Das hier vorkommende „Laguerresche Polynom“ L kann bei ganzzahligem Index dargestellt werden durch¹⁾

$$(35) \quad L_n(u) = \frac{e^u}{n!} \frac{d^n}{du^n} (u^n e^{-u}).$$

Im kontinuierlichen Spektrum können wir dieselbe Darstellung (34) wie im diskontinuierlichen Spektrum benutzen, aber L ist nicht mehr das Laguerresche Polynom, sondern eine ganze transzendente Lösung der Laguerreschen Differentialgleichung. u wird dann rein imaginär; n ist nicht mehr ganzzahlig und wird wie wir sehen werden, in unserem Falle ebenfalls rein imaginär.

Unsere Definition der parabolischen Koordinaten $\xi \eta \varphi$,

$$0 < \xi < \infty, \quad 0 < \eta < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi$$

ergibt sich aus ihrem Zusammenhang mit den rechtwinkligen Koordinaten

$$(36) \quad x = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad y = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad z = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi,$$

woraus noch folgt

$$(36a) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}(\xi + \eta).$$

Wir setzen zunächst wie in § 1 einen Quellpunkt Q im Endlichen, und zwar auf der negativen x -Achse voraus. Hier ist nach (36) $\xi = \xi_0 = 0$, $\eta = \eta_0 > 0$. Nach (34) verschwinden aber alle Eigenfunktionen $\psi_m(Q)$ für $\xi_0 = 0$ und $m > 0$ wegen des Faktors $u^{m/2}$; der Zähler in der früheren Gleichung (6) enthält also nur Produkte von der Form

$$(37) \quad \psi_0^*(Q) \psi_0(P),$$

wo der Index 0 auf $m = 0$ hinweist. Damit ist der Symmetrie des Problems automatisch Rechnung getragen.

Auf die Lösung mit Quellpunkt wird von anderer Seite²⁾ eingegangen werden. Hier behandeln wir nur den Fall der ebenen Welle. $Q \rightarrow \infty$ und zeigen, daß dann bereits das

1) Wir sind insofern von der gewöhnlichen Normierung der Laguerreschen Polynome abgewichen, als wir im Nenner $n!$ hinzugefügt haben. Das bedeutet, daß wir nicht den Koeffizienten der höchsten Potenz von L gleich 1 gemacht haben, sondern das konstante Glied.

2) Vgl. die Dissertation von J. Meixner, Ztschr. f. Mathem. 1931 (im Druck).

einzelne Produkt (37) bzw. bei Absehung von dem konstanten Faktor $\psi^*(Q)$ (der Index 0 kann weiterhin fortbleiben), die einzelne Funktion $\psi(P)$ die gesuchte Lösung darstellt, sofern wir den in ψ vorkommenden Separationsparameter passend bestimmen.

Die Differentialgleichung von ψ lautet nach der bekannten Transformationsregel von $\Delta \psi$ (a = Wasserstoffradius)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \left(\frac{k^2}{4} (\xi + \eta) + \frac{Z}{a} \right) \psi = 0.$$

Separation in die beiden Bestandteile $f_1(\xi)$ und $f_2(\eta)$ liefert:

$$(38) \quad \begin{cases} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{df_1}{d\xi} + \left(\frac{k^2}{4} \xi + \frac{Z}{2a} - \lambda \right) f_1 = 0, \\ \frac{d}{d\eta} \eta \frac{df_2}{d\eta} + \left(\frac{k^2}{4} \eta + \frac{Z}{2a} + \lambda \right) f_2 = 0. \end{cases}$$

λ ist der Separationsparameter.

Wir führen in der ersten bzw. zweiten Gl. (38) die unbenannte Variable ein:

$$(38a) \quad u = -ik\xi \quad \text{bzw.} \quad u = +ik\eta$$

und erhalten zusammenfassend

$$(39) \quad \frac{d}{du} u \frac{df}{du} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{u}{4} \right) f = 0$$

mit

$$(40) \quad n = \left\{ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \right\} = \pm \frac{i}{k} \left(\frac{Z}{2a} \mp \lambda \right) - \frac{1}{2} \quad \text{für } f = \left\{ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \right\}.$$

Setzen wir analog zu der auf $m = 0$ spezialisierten Gl. (34)

$$(41) \quad f = e^{-u/2} L(u),$$

so folgt für L die „Laguerresche Differentialgleichung“ (Striche bedeuten Ableitungen nach u):

$$(42) \quad uL'' + (1-u)L' + nL = 0.$$

Die Lösung von (42) ergibt sich am einfachsten aus der Darstellung (35). Wir schreiben (35) nach dem Cauchyschen Satz um in

$$(43) \quad L(u) = e^u \frac{1}{2\pi i} \int \frac{x^n e^{-x}}{(x-u)^{n+1}} dx$$

und erhalten dadurch einen Ausdruck, der die Gl. (42) auch für imaginäre n befriedigt. Der Integrationsweg muß dabei in der x -Ebene geschlossen sein, d. h. er muß die bei ungeradem n

vorhandenen beiden Verzweigungspunkte $x = u$ und $x = 0$ umlaufen. Wir können ihn aber auch in der in Fig. 2 angedeuteten Weise nach $x = +\infty$ hinüberziehen. Wir überzeugen uns leicht, daß jedes der beiden Schleifenintegrale einzeln die Gl. (42) erfüllt. Zum Beweise benutzt man bequemerweise die neue Integrationsvariable $z = x - u$ und schreibt statt (43)

$$(44) \quad L(u) = \frac{1}{2\pi i} \int (z + u)^n z^{-n-1} e^{-z} dz,$$

so daß sich die in (42) vorgesehenen Differentiationen in einfachster Weise unter dem Integralzeichen ausführen lassen. Dabei hat man zu beachten, daß der Integrand an den Enden der Schleifen $z = \infty$, verschwindet. Die so entstehenden neuen Lösungen unserer Gl. (42) nennen wir $\frac{1}{2} L^{(1)}$ bzw. $\frac{1}{2} L^{(2)}$.

Man kann (44) symmetrischer schreiben, wenn man für z die neue Variable y einführt durch

$$z = u \left(y - \frac{1}{2} \right).$$

Dann entsteht

$$(45) \quad \begin{cases} L(u) = e^{u/2} A(u), \\ A(u) = \frac{1}{2\pi i} \int \left(y + \frac{1}{2} \right)^n \left(y - \frac{1}{2} \right)^{-n-1} e^{-uy} dy. \end{cases}$$

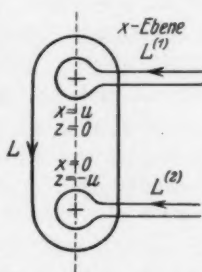
Der Integrationsweg läuft hier in der y -Ebene um die singulären Punkte $y = \pm \frac{1}{2}$ im positiven Sinne um.¹⁾

Ersetzt man in dem Integral für A gleichzeitig u, n, y durch $-u, -n-1, -y$, so ergibt sich unmittelbar

$$(46) \quad A(-u, -n-1) = A(u, n).$$

Daraus folgt nach (45)

$$(46a) \quad L(-u, -n-1) = e^{-u} L(u, n).$$



Integrationsweg für die Laguerrefunktion L und für die Teilfunktionen $L^{(1)}, L^{(2)}$

Fig. 2

¹⁾ Die von Th. Seixl diskutierten Integrale (Ztschr. f. Phys. 56. S. 72. 1929) lassen sich auf unser Integral (45) zurückführen.

Außer diesen komplexen Darstellungen von L wird uns weiterhin eine reelle Darstellung¹⁾ mittels der Besselschen Funktion I_0 nützlich sein:

$$(47) \quad L(u) = \frac{e^u}{2\Gamma(n+1)} \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{4}\right)^n e^{-\frac{x^2}{4}} I_0(x\sqrt{u}) x dx.$$

Man kann sie entweder durch Einsetzen in die Differentialgleichung (42) verifizieren oder auch mittels der in Note 9 gegebenen Formeln aus (45) ableiten. Der Nenner $2\Gamma(n+1)$ in (47) normiert L auf die Bedingung $L(0) = 1$, vgl. (50).

Zu den beiden Schleifen von Fig. 2 zurückkehrend, setzen wir

$$(48) \quad L = \frac{1}{2}(L^{(1)} + L^{(2)})$$

in voller Analogie zu der Zerlegung der Besselschen in die beiden Hankelschen Funktionen, vgl. § 3. Daß sich die beiden Teilfunktionen $L^{(1)}$ und $L^{(2)}$ asymptotisch exponentiell verhalten, werden wir sogleich zeigen.

Zunächst müssen wir an eine für beliebige n gültige Darstellung von $\Gamma(n)$ erinnern. Für ganzzahlige n ist, wenn man als Integrationsweg die obere Schleife in Fig. 2 benutzt

$$(49) \quad \frac{1}{\Gamma(n+1)} = \frac{e^{i\pi n}}{2\pi i} \int \frac{e^{-z} dz}{z^{n+1}};$$

zum Beweise braucht man nur e^{-z} durch seine Potenzreihe zu ersetzen. Diese Definition (49) überträgt sich ohne weiteres auf beliebige nicht-ganze und komplexe n .

Jetzt wollen wir die Darstellung von $L(u)$ in der Umgebung von $u = 0$ aus (44) berechnen. Wir entwickeln

$$(z+u)^n = z^n \left(1 + \frac{u}{z}\right)^n = z^n + \binom{n}{1} z^{n-1} u + \binom{n}{2} z^{n-2} u^2 + \dots$$

Das ist in konvergenter Weise möglich, weil unser Integrationsweg in L die beiden Punkte $x = u$ und $x = 0$, d. h. $z = 0$ und $z = -u$ umfaßt, so daß $|z| > |u|$ genommen werden kann. Bei gliedweiser Benutzung von (49) erhält man unmittelbar:

$$(50) \quad L(u) = 1 - \binom{n}{1} \frac{u}{1!} + \binom{n}{2} \frac{u^2}{2!} - \dots$$

1) Vgl. P. S. Epstein u. M. Muskat, Proc. Nat. Ac. 15. S. 405. 1929 Gl. (8), wo eine zu (47) analoge Darstellung durch gliedweise Integration der Reihe für I_0 bewiesen wird.

$L(u)$ verhält sich also *regulär* für $u = 0$ und stellt eine ganze transzendente Funktion dar; nur bei positiv ganzem n bricht die Reihe ab und geht in die bekannte Darstellung der Laguerreschen Polynome über.¹⁾

Hätten wir als Integrationsweg eine der beiden Schleifen von Fig. 2 gewählt, so hätten wir der Konvergenzbedingung $|z| > |u|$ nicht genügen können, da diese Schleifen zwischen den Verzweigungspunkten $z = 0$ und $z = -u$ „eingepflockt“ sind. Deshalb werden die beiden Bestandteile $L^{(1)}$ und $L^{(2)}$ für $u = 0$ *singulär*.

Wir gehen zur asymptotischen Darstellung über und berechnen die beiden Schleifenintegrale einzeln, zunächst dasjenige um den Punkt $z = 0$ ($x = u$ in Fig. 2). Zu dem Zwecke tragen wir in (44) die (für entfernte Teile des Integrationsweges divergente) Entwicklung ein:

$$(z + u)^n = u^n \left(1 + \frac{z}{u} \right)^n = u^n \left(1 + \binom{n}{1} \frac{z}{u} + \dots \right).$$

Aus (44) ergibt sich, wenn wir wieder Gl. (49) sowie die Funktionalgleichung der F -Funktion benutzen:

$$\frac{1}{2} L^{(1)}(u) = \frac{e^{-i\pi n} u^n}{\Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} \binom{n}{1} \frac{1}{u} + \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-1)} \binom{n}{2} \frac{1}{u^2} + \dots \right)$$

oder einfacher geschrieben:

$$(51) \quad \frac{1}{2} L^{(1)}(u) = \frac{e^{-i\pi n} u^n}{\Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{n^2}{1! u} + \frac{n^2(n-1)^2}{2! u^2} - \dots \right).$$

Das Integral über die andere Schleife gibt entsprechend $\frac{1}{2} L^{(2)}(u)$. Wir greifen zu seiner Berechnung bequemerweise auf die Darstellung (43) zurück und betrachten die Schleife um $x = 0$ in Fig. 2. In (43) setzen wir

$$(x - u)^{-n-1} = (-u)^{-n-1} \left(1 - \binom{-n-1}{1} \frac{x}{u} + \binom{-n-1}{2} \frac{x^2}{u^2} + \dots \right)$$

1) Aus (50) erkennt man auch den Zusammenhang von L mit der allgemeinen hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, Gl. (93 b). $L_n(u)$ entsteht aus F , wenn man setzt

$$\alpha = -n, \quad \gamma = 1, \quad x = \frac{u}{\beta}, \quad \beta \rightarrow \infty.$$

L wird als „confluent hypergeometric function“ bezeichnet und mit drei Argumenten geschrieben: $F(-n, 1, u)$.

und erhalten wegen (49):

$$\frac{1}{2} L^{(2)}(u) = \frac{e^{-i\pi(n+1)} e^u (-u)^{-n-1}}{\Gamma(-n)} \cdot \left(1 + \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-n-1)} \binom{-n-1}{1} \frac{1}{u} + \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-n-2)} \binom{-n-1}{2} \frac{1}{u^2} + \dots \right)$$

oder vereinfacht

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} L^{(2)}(u) &= \frac{-n}{u} e^{-i\pi n} \frac{e^u (-u)^{-n}}{\Gamma(1-n)} \\ &\cdot \left(1 + \frac{(n+1)^2}{1! u} + \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{2! u^2} + \dots \right). \end{aligned} \right.$$

Die Summe von (51) und (52) gibt nach (48) die asymptotische Darstellung von $L(u)$. Letztere haben wir zur Berechnung der beiden in (41) zusammengefaßten Bestandteile f_1 und f_2 von ψ bei hinreichend entfernter Lage des Aufpunktes zu benutzen. Wir erhalten mit Rücksicht auf (38a) und (40), wenn wir uns in (51) und (52) je auf das erste Glied beschränken

$$f_1 = \left(e^{\frac{ik\xi}{2}} \frac{(-ik\xi)^{n_1}}{\Gamma(1+n_1)} + e^{-ik\xi} \frac{n_1}{ik\xi} \frac{(+ik\xi)^{-n_1}}{\Gamma(1-n_1)} \right) e^{-i\pi n_1},$$

$$f_2 = \left(e^{-ik\frac{\eta}{2}} \frac{(ik\eta)^{n_2}}{\Gamma(1+n_2)} - e^{+ik\frac{\eta}{2}} \frac{n_2}{ik\eta} \frac{(-ik\eta)^{-n_2}}{\Gamma(1-n_2)} \right) e^{-i\pi n_2}.$$

Das Produkt dieser beiden Funktionen besteht aus vier Gliedern, von denen zwei mit den Exponentialfaktoren

$$e^{\frac{ik\xi - \eta}{2}} = e^{ikz}, \quad e^{\frac{ik\xi + \eta}{2}} = e^{ikr},$$

die beiden anderen mit den im Vorzeichen von i entgegengesetzten Faktoren behaftet sind. Die ersteren *entsprechen* unserem Problem, indem sie die in der x -Richtung einfallende bzw. die vom Kern gestreute, nach außen divergierende Welle darstellen. Die letzteren *widersprechen* unserem Problem, da sie eine auf den Kern zu konvergierende bzw. eine in der verkehrten Richtung einfallende Welle darstellen. Die beiden letzteren Glieder enthalten aber den Faktor n_1 , und können daher zum Verschwinden gebracht werden, wenn man $n_1 = 0$ wählt. Nach (40) wird dann

$$(53) \quad \lambda = \frac{Z}{2a} + \frac{ik}{2}, \quad n_2 = n = \frac{Z}{ika}.$$

Der bisher unbestimmte Separationsparameter wird also durch unsere auf das Unendliche bezügliche Forderung (Ausstrahlungsbedingung) festgelegt. Mit $n_1 = 0$ wird $f_1 = e^{ik \frac{z}{2}}$ und daher asymptotisch:

$$(54) \quad \psi = f_1 f_2 = \left(\frac{(ik\eta)^n}{\Gamma(1+n)} e^{ikz} - \frac{(-ik\eta)^{-n}}{\Gamma(1-n)} \frac{n}{ik\eta} e^{ikr} \right) e^{-in\pi}.$$

Das erste Glied in (54) ist die modifizierte einfallende Welle, das zweite Glied die gestreute Welle. Das Verhältnis der Amplitudenquadrate beider wird:

$$\left| \frac{(-ik\eta)^{-n}}{(ik\eta)^{+n}} \right| \left| \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1-n)} \right| \left| \frac{n}{ik\eta} \right|^2.$$

Hier sind die beiden ersten Faktoren gleich 1, da n rein imaginär ist. Der letzte Faktor ist $(Z/k^2 a \eta)^2$ und stimmt wegen $\eta = 2r \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$, ϑ = Beugungswinkel, vgl. (36) und (36a), und wegen $k^2 a = \frac{2E}{e^2}$ genau mit der Rutherfordschen Formel überein.

Übrigens wollen wir betonen, daß unsere Darstellung gegenüber derjenigen von Temple, a. a. O., nur der Form, nicht der Sache nach neu ist.

Das allgemeine Ergebnis dieses Paragraphen läßt sich so zusammenfassen: Die in der negativen x -Richtung einfallende, am Atomkern Z gestreute Materiewelle von der Wellenzahl k wird in parabolischen Koordinaten dargestellt durch

$$(55) \quad \psi = e^{ikz} L(u, n), \quad u = ik\eta, \quad n = \frac{Z}{ika}.$$

L wird durch die Integrale (43) bis (46) definiert und durch die konvergente Reihe (50) wiedergegeben. Die asymptotische Darstellung von L setzt sich aus (51) und (52) zusammen; dabei ist vorausgesetzt $u \rightarrow \infty$, n endlich. Der Fall, daß u und n gleichzeitig ins Unendliche gehen, wird in Note 8 behandelt werden.

§ 6. Anschließende Probleme

Wir haben hier nur das Ein-Elektronenproblem behandelt, d. h. die Beugung am bloßen Kern. Derselbe Weg führt aber auch im Prinzip zu einer exakten Lösung des Zwei- oder Mehr-Elektronenproblems, d. h. zur Beugung am Wasserstoffatom

oder an komplizierteren Atomen. Dabei treten (vgl. § 1) die Eigenfunktionen des Heliums oder der höheren Atome auf. Und zwar bei der Beugung am neutralen Wasserstoffatom die Eigenfunktionen von He mit der Kernladung 1 oder, was dasselbe ist, vom negativen Wasserstoffion usf.

Natürlich muß man, um bei den Mehr-Elektronenproblemen zu der räumlichen Verteilung des abgelenkten Elektrons zu gelangen, über die übrigen Elektronen, deren Koordinaten in unsere allgemeine Beugungsformel eingehen, mitteln. Ferner muß hervorgehoben werden, daß die Eigenfunktionen beim Mehr-Elektronenproblem nur approximativ bekannt sind. Unsere „exakte“ Lösung läßt sich daher nicht direkt auswerten. Aber die Approximation, die hier die Eigenfunktionen betrifft, ist von ganz anderer Art als bei der schrittweisen Behandlung der Beugung als Störungsproblem, wie sie zuerst Born entworfen hat. Während im letzteren Fall beim Atom der Ordnungszahl n die Eigenfunktion dieses Atoms auftritt, benötigen wir hier die Eigenfunktionen eines Ions mit $n + 1$ Elektronen.

In dem bisher behandelten Fall, der Beugung am reinen Kern, hatten wir es nur mit dem *elastischen* Stoß zu tun, da der Kern keiner Konfigurationsänderung fähig ist. Anders im Mehr-Elektronenfalle. Hier ergeben sich von selbst neben einem Gliede, welches den elastischen Zusammenstoß bedeutet, weitere Glieder, welche *unelastischen* Stößen, d. h. Übergängen in andere Atomkonfigurationen entsprechen. Dasselbe zeigte sich bereits in der Bornschen Theorie der Stoßvorgänge.

Gegenwärtig kehren wir zum Ein-Elektronenproblem zurück, nämlich zur „Bremsung“ des Elektrons am reinen Kern.

II. Teil:

Das kontinuierliche Röntgenspektrum

In diesem Teil wird ein Problem aufgenommen, das ich vor über 20 Jahren auf klassischer Grundlage behandelt habe.¹⁾ Über einen Teil der Resultate habe ich bereits während eines Aufenthalts in Amerika berichtet.²⁾ Mein Hauptinteresse war

1) A. Sommerfeld, Physikal. Ztschr. 10. S. 969. 1909.

2) A. Sommerfeld, Proc. Nat. Ac. 15. S. 393. 1929.

damals, die Beobachtungen Kulenkampffs¹⁾ über die Intensitätsverteilung der an dünnen Folien erzeugten Röntgenstrahlung zu erklären. Dabei beschränkte ich mich auf einen plausiblen Ansatz für die Winkelabhängigkeit der Ausstrahlung, ohne die Matrixelemente selbst zu berechnen. Letzteres soll hier nachgeholt werden, zumal um die neueren Polarisationsbeobachtungen von Kulenkampff²⁾ zu diskutieren. Auf die inzwischen erschienenen Arbeiten von Oppenheimer³⁾ und Sugiura⁴⁾ werde ich an gegebener Stelle zurückkommen.

Verzeichnis der im folgenden verwendeten Koordinaten und Bezeichnungen

Koordinaten

Die x -Achse hat die (asymptotische) Geschwindigkeitsrichtung des einfallenden Elektrons. Die xy -Ebene ist durch die Beobachtungsrichtung hindurchgelegt.

$$\xi = r + x; \eta = r - x; \varphi; \operatorname{ctg} \varphi = \frac{y}{z}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

parabolische Raumkoordinaten.

α, β : Winkelkoordinaten der (asymptotischen) Austrittsrichtung des gebremsten Elektrons. α : Winkel gegen die x -Achse, β : Drehwinkel um die x -Achse von der xy -Ebene aus gerechnet.

Θ : Winkel zwischen x -Achse und Beobachtungsrichtung.

Bezeichnungen

A : Vektorpotential der emittierten Strahlung, von einem konstanten Faktor abgesehen.

A_x, A_y, A_z : rechtwinklige Komponenten von A .

A_Θ : Komponente von A senkrecht zur Beobachtungsrichtung in der durch Einfall- und Beobachtungsrichtung hindurchgelegten Ebene

$A_\Theta^2 = \frac{1}{4\pi} \int A_\Theta A_\Theta^* \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta$: über die Austrittsrichtungen gemittelt Absolutquadrat von A_Θ , entsprechend $A_z^2; A^2 = A_\Theta^2 + A_z^2$.

$\beta = \frac{v_1}{c}$: Verhältnis der Geschwindigkeit des einfallenden Elektrons zur Lichtgeschwindigkeit.

$$D = \frac{M_z^2}{M_x^2}; \text{ Depolarisationsverhältnis.}$$

1) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. 57. S. 597. 1928.

2) H. Kulenkampff, Physikal. Ztschr. 30. S. 513. 1929.

3) J. R. Oppenheimer, Ztschr. f. Phys. 55. S. 725. 1929.

4) Y. Sugiura, Phys. Rev. 34. S. 858. 1929.

$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \dots$: Gauss-
sche hypergeometrische Funktion.

$$F = F(1 + n_1, 1 - n_2, 1, x); F_1 = F(1 + n_1, 2 - n_2, 1, x); F' = \frac{dF}{dx}$$

k_1, k_2, κ : Wellenzahl des einfallenden, des austretenden Elektrons
und des emittierten Lichtquants.

$$k_{1,2} = \frac{2\pi m v_{1,2}}{h}; \kappa = \frac{2\pi \nu}{c} = \frac{\pi m (v_1^2 - v_2^2)}{hc}.$$

$$k = k_1 - k_2; K = k_1 + k_2.$$

$L = L_{n_1}(w) = 1 - \left(\frac{n_1}{1}\right)\frac{w}{1} + \left(\frac{n_1}{2}\right)\frac{w^2}{2!} - \dots$: Laguerrefunktion
(anders normiert als gewöhnlich).

m : Masse des Elektrons.

$M_q = \int q \psi_1 \psi_2^* d\tau$: Matricelement in der q -Richtung. Analog M_x, M_y, M_z ; M_θ vgl. A_θ .

$M_q^2 = \frac{1}{4\pi} \int M_q M_q^* \sin \alpha d\alpha d\beta$: über die Austrittsrichtungen gemittelt
Absolutquadrat der q -Komponente des elektrischen Moments.

ν : Frequenz des ausgestrahlten Lichtes.

$$\nu_g = \frac{m v_1^2}{2h}$$
: Grenzfrequenz, entsprechend dem Endzustand $v_2 = 0$.

v_1, v_2 : Geschwindigkeit des einfallenden bzw. austretenden (gebremsten) Elektrons.

$V = \frac{m v_1^2}{2e}$: Röhrenspannung, Voltgeschwindigkeit des einfallenden Elektrons.

V_k : Ionisierungsspannung der K -Schale.

$V_g = \frac{h\nu}{e}$: Mindestspannung, die zur Emission der Frequenz ν erforderlich ist.

Z : Kernladungszahl.

ψ_1, ψ_2 : dem ein- bzw. ausfallenden Elektron zugeordnete zeit-unabhängige Eigenfunktionen.

§ 7. Allgemeine Formulierung der Ausstrahlung mittels der Matricelemente

v_1 sei die Geschwindigkeit des auffallenden Elektrons,
 $v_2 < v_1$ seine Geschwindigkeit nach dem Passieren des brem-
senden Atoms. Dieses behandeln wir als reinen Kern ohne
Elektronenhülle.

Die Ausstrahlung ergibt sich bei nicht zu großen Geschwindigkeiten v_1, v_2 durch zweimalige Differentiation nach t der Koordinatenmatrix

$$(56) \quad \begin{cases} M_q = \int q u_1 u_2^* d\tau, \\ u_\sigma = \psi_\sigma \exp. \left(\frac{2\pi i}{h} \left\{ E_0 + \frac{m}{2} v_\sigma^2 \right\} t \right), \quad \sigma = 1, 2. \end{cases}$$

Hier sind ψ_1 und ψ_2 die aus Teil I Gl. (55) zu entnehmenden Raumfunktionen. E_0 ist die Ruhenergie des Elektrons. Aus der Zeitabhängigkeit von (56) folgt, daß die Ausstrahlungsfrequenz bestimmt wird durch die Gleichung

$$(57) \quad \begin{cases} h\nu = \frac{m}{2} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 (k_1^2 - k_2^2), \\ k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi m v_1}{h}, \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi m v_2}{h}. \end{cases}$$

Auch nach Absonderung des Zeitfaktors wollen wir das Matrixelement mit M_q bezeichnen. Wir werden also auch schreiben:

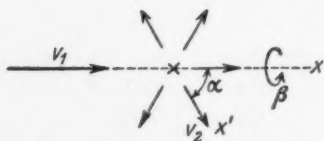
$$(58) \quad M_q = \int q \psi_1 \psi_2^* d\tau.$$

Gl. (57) gibt die Frequenz für ein bestimmtes Element des kontinuierlichen Spektrums. Man erhält das ganze Spektrum von der kurzwelligen Grenze bis zur Frequenz Null, wenn man v_2 von Null bis v_1 wachsen läßt.

Zunächst sei der allgemeine Charakter der Formeln (56) und (58) erläutert. Die Integration $d\tau$ erstreckt sich über den ganzen Raum. Der Anfangszustand des Elektrons ψ_1 wird dabei nicht nur auf der Vorderseite des Kerns ($x < 0$) verwendet, sondern auch auf der Rückseite ($x > 0$). Entsprechend der Endzustand des Elektrons ψ_2 . Beide Zustände werden als gleichzeitig und überall gegenwärtig behandelt, in genauer Analogie zur Ausstrahlungsberechnung im diskontinuierlichen Spektrum, wo beim Übergange $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ ebenfalls beide Zustände im ganzen Raum im Sinne der Formel (58) miteinander kombiniert werden. Man sieht hieraus, daß unsere Methode von einer modellmäßigen Beschreibung des Bremsvorganges weit entfernt ist.

Fig. 3 zeigt das einfallende Elektron nach der x -Achse fortschreitend und deutet zugleich an, daß wir nach der Brem-

sung alle Austrittsrichtungen als gleichberechtigt behandeln wollen. In einer vorläufigen Note (a. a. O., Proc. Nat. Ac.) hatte ich zunächst auch v_2 in der x -Richtung angenommen, entsprechend der Vorstellung eines „geradlinigen Bremsweges“, die der Behandlung vom Jahre 1909 zugrunde lag. In einem Zusatz zu jener Note hatte ich aber betont, daß diese Annahme zu eng sei, sowohl aus theoretischen Gründen, nach Diskussionsbemerkungen der Herren Kemble und Kennard, als auch wegen der experimentellen Ergebnisse der Herren Duane¹⁾



Einfallender Kathodenstrahl v_1 ,
 austretender (gebremster) Strahl v_2 ;
 von der hinzukommenden Streuung
 am Kern ist in der Zeichnung
 beidemale abgesehen

Fig. 3

und Kulenkampff (a. a. O.). Die Gleichberechtigung aller Austrittsrichtungen, wie sie Fig. 3 darstellt, entspricht im diskontinuierlichen Spektrum der Summation über alle zulässigen Werte der Richtungsquantenzahl m im Endzustande des Spektralterms und dem Umstande, daß alle diese Werte mit gleichem Gewicht²⁾ in Rechnung gesetzt werden.

Die hier skizzierte wellenmechanische Methode unterscheidet sich vorteilhaft von der älteren Methode darin, daß sie keine speziellen Annahmen zu machen braucht und den Bremsvorgang als solchen ganz unbestimmt lassen kann. Wir brauchen also nicht Geradlinigkeit oder gleichförmige Beschleunigung bei der Bremsung anzunehmen.

Der Ausdruck (1a) ist zunächst für irgendeine der in Fig. 3 angedeuteten Richtungen von v_2 auszurechnen. Sodann ist über alle diese Richtungen zu mitteln und zwar *quadratisch*,

1) W. Duane, Proc. Nat. Ac. **13**. S. 662. 1927; **14**. S. 450. 1928.

2) D. h. mit gleicher a priori-Wahrscheinlichkeit, unbeschadet der verschiedenen wellenmechanisch zu berechnenden Übergangswahrscheinlichkeiten. Dasselbe gilt in unserem Falle für die verschiedenen Austrittsrichtungen der Elektronen: bei gleicher a priori-Wahrscheinlichkeit (Fig. 3) verschiedene Wahrscheinlichkeiten des Übergangs, die a posteriori durch Ausrechnen der Matrixelemente berechnet werden können.

da es sich um *inkohärente* Möglichkeiten handelt. Man hat also weiter zu bilden

$$(59) \quad \mathbf{M}_q^2 = \frac{1}{4\pi} \int d\omega M_q M_q^*,$$

wo $d\omega$ das Element der Einheitskugel bedeutet.

Im diskontinuierlichen Spektrum berechnet man mittels der Matricelemente die Ausstrahlung eines *ruhenden* Dipols. In unserem Falle handelt es sich dagegen um die Ausstrahlung des *bewegten* Elektrons von der Anfangsgeschwindigkeit v_1 und der Endgeschwindigkeit v_2 . Gerade darauf beruhen die interessanten Erscheinungen: Voreilen des Maximums der Emission, Schwächung der Intensität in der Einfallsrichtung, die Kulenkampff an der dünnen Antikathode beobachtet hat und die schon früher in unvollkommenerer Form von der dicken Antikathode her bekannt waren. Ich habe diesen Erscheinungen in der vorläufigen Note a. a. O. dadurch Rechnung getragen, daß ich auf die Matricelemente eine Relativitätstransformation anwandte, die dem Übergang von der ruhenden zur bewegten Lichtquelle entspricht und konnte dadurch die Kulenkampffschen Beobachtungen qualitativ und zum Teil auch quantitativ darstellen. Dieses etwas willkürliche Verfahren wird im folgenden durch die zwangsläufige Retardierungsmethode (§§ 12 und 13) ersetzt werden, wobei der fragliche Relativitätsfaktor automatisch, wenn auch zum Teil in etwas geänderter Form, herauskommt. Fürs erste aber möge von der Retardierung abgesehen werden. Dies ist, wie oben bemerkt, nur berechtigt, so lange $v_1 \ll c$ ist.

§ 8. Die kurzwellige Grenze des kontinuierlichen Spektrums

Wegen der besonders einfachen Darstellung der Elektronenwelle in parabolischen Koordinaten werden wir sowohl den Anfangszustand ψ_1 , wie den Endzustand ψ_2 auf Parabelkoordinaten beziehen, wobei die Parabeln im ersten Fall die Einfallsrichtung x , im letzteren die Austrittsrichtung x' zur Achse haben sollen. Erstere mögen ξ, η, φ , letztere ξ', η', φ' heißen. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, $v_2 = 0$, d. h. mit der Grenze des kontinuierlichen Spektrums. Zwar kann man in diesem Falle von keiner eigentlichen Austrittsrichtung sprechen.

Wir werden aber sehen, daß wir trotzdem auch in diesem Grenzfall zunächst mit einer Richtung von v_2 rechnen müssen. Mit $v_2 = 0$ wird nach (57) $k_2 = 0$ und nach (53) $n_2 = \infty$. Das Argument der Laguerreschen Funktion L , das wir früher u nannten und das dementsprechend jetzt im Endzustande u_2 heißen möge, wird nach (55) gleich Null, so jedoch, daß

$$u_2 n_2 = \frac{Z}{a} \eta'$$

endlich bleibt. Man ersieht daraufhin aus der Darstellung (50) von L oder auch direkt aus der Differentialgleichung (42), daß in diesem Grenzfall die Laguerresche Funktion L in die Besselsche Funktion I_0 übergeht, daß nämlich gilt

$$(60) \quad L(u_2, n_2) = I_0(R), \quad R = 2 \sqrt{\frac{Z}{a}} \eta'.$$

Dieselbe Funktion I_0 stellt auch bis auf einen Normierungsfaktor N die gesamte Wellenfunktion ψ_2 im Endzustande dar, vgl. (55), wo wegen $k_2 = 0$ der Exponentialfaktor zu Eins wird. Man hat daher

$$(61) \quad \psi_2 = N_2 I_0(R) = \psi_2^*.$$

Nach Definition der parabolischen Koordinaten in (36) und (36a) ist im Endzustande:

$$\xi' = r' + x', \quad \eta' = r' - x',$$

wo die rechtwinkligen Koordinaten x', y', z' zur Austrittsrichtung ebenso liegen mögen wie $x y z$ zur Einfallsrichtung. Wegen des orthogonalen Zusammenhanges zwischen $x' y' z'$ und $x y z$ hat man offenbar $r' = r$ und

$$(62) \quad x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \cos \beta + z \sin \alpha \sin \beta.$$

Hier bedeutet (vgl. Fig. 3) α den Winkel der x' - gegen die x -Achse, β das Azimut um die x -Achse. Somit wird

$$(62a) \quad \eta' = r - x \cos \alpha - \sin \alpha (y \cos \beta + z \sin \beta)$$

oder, wenn wir aus (36) einsetzen:

$$(62b) \quad \begin{cases} \eta' = \frac{1}{2}(\xi + \eta) - \frac{1}{2}(\xi - \eta) \cos \alpha - \sqrt{\xi \eta} \sin \alpha \cos(\varphi - \beta) \\ = \xi \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \eta \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sqrt{\xi \eta} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos(\varphi - \beta). \end{cases}$$

Das Argument R der Besselschen Funktion I_0 in (60) kann daher geschrieben werden

$$(63) \quad R = \sqrt{\varrho^2 + \sigma^2 - 2\varrho\sigma \cos(\varphi - \beta)}$$

mit den Abkürzungen

$$(63a) \quad \varrho = 2\sqrt{\frac{Z}{a}} \xi \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \sigma = 2\sqrt{\frac{Z}{a}} \eta \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Infolgedessen läßt sich $I_0(R)$ nach dem Additionstheorem der Besselschen Funktionen folgendermaßen entwickeln:

$$(64) \quad I_0(R) = I_0(\varrho)I_0(\sigma) + 2I_1(\varrho)I_1(\sigma) \cos(\varphi - \beta) + \dots$$

Wir gehen zur Berechnung des Matricelementes M_q über. Als Integrationsvariable benutzen wir die parabolischen Koordinaten $\xi \eta \varphi$. Wir haben

$$(65) \quad d\tau = \frac{1}{4}(\xi + \eta) d\xi d\eta d\varphi,$$

ψ_1 ist axial-symmetrisch, also von φ unabhängig, ebenso die Koordinate $q = x$. Infolgedessen, wenn wir zunächst nur die Abhängigkeit von q zum Ausdruck bringen:

$$(66) \quad M_x = \int \int \dots \int_0^{2\pi} d\varphi I_0(R).$$

Da andererseits die Koordinaten $q = y, z$ bzw. mit $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ proportional sind, fassen wir bequemerweise zusammen:

$$(66a) \quad \left. \begin{matrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{matrix} \right\} = \int \int \dots \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \begin{matrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{matrix} \right\} I_0(R).$$

Indem wir I_0 aus (64) einsetzen, sehen wir, daß in (66) nur das erste, in (66a) nur das zweite Glied der Reihenentwicklung übrigbleibt, während alle höheren, in (64) durch ... angedeuteten Cosinusglieder verschwinden. Also

$$(67) \quad \left\{ \begin{matrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{matrix} \right\} = \int \int \dots 2\pi \left\{ \begin{matrix} J_0(\varrho)J_0(\sigma) \\ \cos \beta \\ \sin \beta \end{matrix} \right\} I_1(\varrho)I_1(\sigma).$$

Hierdurch ist die Abhängigkeit von ξ und η „separiert“ (nach (63a) hängt ja ρ nur von ξ , σ nur von η ab) in dem Sinne, daß die M als Produkte einfacher Integrale nach ξ bzw. η berechnet werden können. Nur der Faktor beim Raumelement $\xi + \eta$ Gl. (65), und der von x herrührende Faktor $\xi - \eta$ beim Matricelement M_x stören diese Separierbarkeit. Wir können diese Faktoren aber durch einen Kunstgriff fortschaffen.

Zunächst haben wir nach (58), (65) und (67) mit Rücksicht auf (36) und (55), wenn wir die Normierungsfaktoren vorläufig unterdrücken:

$$(68) \quad \begin{cases} M_x = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta (\xi^2 - \eta^2) e^{i\frac{k_1}{2}(\xi - \eta)} I_0(\rho) I_0(\sigma) L(i k_1 \eta), \\ \begin{pmatrix} M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2} \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix} \int_0^\infty \sqrt{\xi} d\xi \int_0^\infty \sqrt{\eta} d\eta (\xi + \eta) e^{i\frac{k_1}{2}(\xi - \eta)} \\ \cdot I_1(\rho) I_1(\sigma) L(i k_1 \eta). \end{cases}$$

Wir ersetzen nun den Faktor

$$e^{i\frac{k_1}{2}(\xi - \eta)}$$

durch

$$e^{-p(\xi - \eta)} e^{-q(\xi + \eta)}$$

mit der Verabredung, daß im Endresultat gesetzt werde:

$$(69) \quad p = \frac{-i k_1}{2}, \quad q = 0,$$

wobei wir aber zunächst so rechnen werden, als ob q einen positiven Realteil habe, der ausreicht, um die Konvergenz der (vorangehenden und folgenden) Integrale zu sichern.

Dann können die M so geschrieben werden:

$$(70) \quad \begin{cases} M_x = \frac{\pi}{4} \frac{d^2}{dp dq} X Y, \\ \begin{pmatrix} M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \frac{-\pi}{2} \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix} \frac{d}{dq} X_1 Y_1, \end{cases}$$

wo die X, X_1 bzw. Y, Y_1 reine Funktionen von ξ bzw. η sind, nämlich:

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \int_0^{\infty} d\xi e^{-(p+q)\xi} I_0(\rho), \\ X_1 = \int_0^{\infty} \sqrt{\xi} d\xi e^{-(p+q)\xi} I_1(\rho), \\ Y = \int_0^{\infty} d\eta e^{(p-q)\eta} I_0(\sigma) L(ik_1\eta), \\ Y_1 = \int_0^{\infty} \sqrt{\eta} d\eta e^{(p-q)\eta} I_1(\sigma) L(ik_1\eta). \end{array} \right.$$

Wir führen statt ξ die Integrationsvariable u ein durch:

$$(72) \quad \xi = u^2.$$

Nach (63a) und (72) geht ρ über in $2ur$, mit

$$(73) \quad r = \sqrt{\frac{Z}{a}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

und aus (71) erhält man

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 2 \int_0^{\infty} u du e^{-(p+q)u^2} I_0(2ur), \\ X_1 = 2 \int_0^{\infty} u^2 du e^{-(p+q)u^2} I_1(2ur). \end{array} \right.$$

Das erste Integral ist nach der Theorie der Wärmeleitung (Note 9; man fasse $p+q$ als Zeit auf) gleich der Temperaturverteilung, die von einem bei $r=0$ gelegenen Wärmepol ausgeht, nämlich gleich

$$(74a) \quad \frac{1}{2(p+q)} e^{-\frac{r^2}{p+q}}; \text{ daher } X = \frac{1}{p+q} e^{-\frac{r^2}{p+q}};$$

das zweite Integral ist gleich dem halben negativen Differentialquotienten nach r des ersten Integrals, also gleich

$$(74b) \quad \frac{r}{2(p+q)^2} e^{-\frac{r^2}{p+q}}; \text{ daher } X_1 = \frac{r}{(p+q)^2} e^{-\frac{r^2}{p+q}}$$

In Note 9 werden wir die hier benutzte Wärmeleitungsformel allgemeiner beweisen.

Ähnlich lassen sich Y und Y_1 berechnen. Man setze statt (72), (73)

$$(75) \quad \eta = u^2, \quad \sigma = 2us, \quad s = \sqrt{\frac{Z}{a}} \cos \frac{\alpha}{2}$$

und benutze für L die Darstellung (47), wobei das dortige Argument u jetzt durch $k\eta = ku^2$ zu ersetzen ist. Man erhält aus (71):

$$(76) \quad \frac{Y}{Y_1} = \frac{1}{\Gamma(n_1 + 1)} \int_0^\infty x dx \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n_1} e^{-\frac{x^2}{4}} \left\{ \frac{Z}{Z_1} \right\},$$

$$(77) \quad \begin{cases} Z = \int_0^\infty u du e^{-(q-p-i k_1) u^2} I_0(2us) I_0(\sqrt{i k_1} x u) \\ Z_1 = \int_0^\infty u^2 du e^{-(q-p-i k_1) u^2} I_1(2us) I_0(\sqrt{i k_1} x u) \\ \qquad \qquad \qquad = -\frac{1}{2} \frac{dZ}{ds}. \end{cases}$$

Z läßt sich wieder nach Note 9, Gl. (C) auswerten und liefert

$$Z = \frac{1}{2(q-p-i k_1)} e^{-\frac{s^2 + i k_1 s^2 / 4}{q-p-i k_1}} I_0\left(\frac{-i \sqrt{i k_1} s x}{q-p-i k_1}\right).$$

Daraus folgt für Y nach (76):

$$Y = \frac{1}{2 \Gamma(n_1 + 1)} \frac{e^{-\frac{s^2}{(q-p-i k_1)}}}{q-p-i k_1} \int_0^\infty x dx \left(\frac{x^2}{4}\right)^{n_1} e^{-\frac{x^2}{4}} \frac{q-p}{q-p-i k_1} I_0(\dots)$$

Um dies auf die Form der Darstellung (47) zurückzuführen, setze man:

$$(78) \quad \begin{cases} y^2 = x^2 \frac{q-p}{q-p-i k_1}, \quad w = \frac{-i k_1 s^2}{(q-p)(q-p-i k_1)}, \\ \varphi(q-p) = \frac{e^{-\frac{s^2}{(q-p)}}}{q-p} \left(\frac{q-p}{q-p-i k_1}\right)^{-n_1}. \end{cases}$$

Man erhält dann:

$$(78a) \quad Y = \varphi(q-p) L(w),$$

$$(78b) \quad \begin{cases} Y_1 = -\frac{1}{2} \frac{dY}{ds} \\ \qquad \qquad \qquad = \frac{s}{q-p} \varphi(q-p) \left\{ L(w) + \frac{i k_1}{q-p-i k_1} L'(w) \right\}. \end{cases}$$

Indem man diese Ausdrücke mit den Werten von X , X_1 aus (74 a, b) multipliziert und in (70) einsetzt, ergibt sich

$$(79) \quad \begin{cases} M_x = \frac{\pi}{4} \frac{d^2}{dp dq} (\Phi L), \\ \left\{ \begin{matrix} M_y \\ M_z \end{matrix} \right\} = \frac{\pi}{2} r s \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix} \frac{d}{dq} (\Phi_1 L + \Phi_2 L'). \end{cases}$$

$$(80) \quad \begin{cases} \Phi = \frac{1}{q^2 - p^2} \left(\frac{q - p}{q - p - i k_1} \right)^{-n_1} e^{-\frac{r^2}{p+q} - \frac{s^2}{q-p}} \\ \Phi_1 = \frac{-\Phi}{q^2 - p^2}, \quad \Phi_2 = \frac{i k_1 \Phi_1}{q - p - i k_1}. \end{cases}$$

Aus (79) folgt

$$(81) \quad \begin{cases} M_x = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d^2 \Phi}{dp dq} L + \frac{d \Phi}{dp} \frac{dL}{dq} + \frac{d \Phi}{dq} \frac{dL}{dp} + \Phi \frac{d^2 L}{dp dq} \right), \\ \left\{ \begin{matrix} M_y \\ M_z \end{matrix} \right\} = \frac{\pi}{2} r s \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix} \left(\frac{d \Phi_1}{dq} L + \Phi_1 \frac{dL}{dq} + \frac{d \Phi_2}{dq} L' + \Phi_2 \frac{dL'}{dq} \right). \end{cases}$$

Nach der Bedeutung des Argumentes w in (78) ist aber

$$\frac{dw}{dp} = s^2 \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{q-p} - \frac{1}{q-p-i k_1} \right)$$

und dies verschwindet für $p = \frac{-i k_1}{2}$, $q = 0$, vgl. (69). Daher wird

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dp} &= -\frac{dL}{dq} = L' \frac{dw}{dp} = 0, \quad \frac{dL'}{dq} = -L'' \frac{dw}{dp} = 0, \\ \frac{d^2 L}{dp dq} &= -L'' \left(\frac{dw}{dp} \right)^2 - L' \frac{d^2 w}{dp^2} \\ &= -L' s^2 \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{1}{q-p} - \frac{1}{q-p-i k_1} \right) = -L' s^2 \frac{32 i}{k_1^3}. \end{aligned}$$

Somit vereinfacht sich (81) zu

$$\begin{cases} M_x = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d^2 \Phi}{dp dq} L - \frac{32 i s^2}{k_1^3} \Phi L' \right), \\ \left\{ \begin{matrix} M_y \\ M_z \end{matrix} \right\} = \frac{\pi}{2} r s \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix} \left(\frac{d \Phi_1}{dq} L + \frac{d \Phi_2}{dq} L' \right). \end{cases}$$

Die hier noch vorkommenden Koeffizienten von L und L' findet man durch elementare Rechnung aus (80). Setzt man schließlich auch hier $p = \frac{-i k_1}{2}$, $q = 0$ und berücksichtigt, daß nach (73), (75) und (80) wird (wegen $n_1 = \frac{Z}{i k_1 a}$).

$$(82) \quad \begin{cases} \frac{r^2}{i k_1} = n_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{s^2}{i k_1} = n_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad w = \frac{4 s^2}{i k_1} = 4 n_1 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial q} = 0, \end{cases}$$

so findet man:

$$(83) \quad \begin{cases} M_x = \frac{16\pi n_1}{k_1^4} (-1)^{-n_1} \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} L' - L \right) e^{-2n_1 \cos \alpha}, \\ \begin{Bmatrix} M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \frac{16\pi n_1}{k_1^4} (-1)^{-n_1} \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix} \sin \alpha L' e^{-2n_1 \cos \alpha}. \end{cases}$$

Jetzt haben wir noch die über alle Richtungen gemittelten Momente M nach Gl. (59) zu bilden. Dabei fällt im absoluten Betrage der Faktor $\exp(-2n \cos \alpha)$ fort, da n rein imaginär ist, während der Faktor $(-1)^{-n_1} = \exp(-i\pi n_1)$ reell ist und stehen bleibt.

Da

$$\int d\omega \dots = \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \dots,$$

erhalten wir

$$(84) \quad \begin{cases} M_x^2 = C \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha \left| L - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} L' \right|^2 \\ M_y^2 = M_z^2 = \frac{1}{2} C \int_0^\pi \sin^3 \alpha d\alpha |L'|^2, \\ C = 2^7 \pi^2 |n_1|^2 k_1^{-8} e^{-2i\pi n_1}. \end{cases}$$

Dieses Resultat stimmt mit den Ergebnissen von Oppenheimer und Sugiura (a. a. O.) überein, wenn man einen Fehler bei Oppenheimer nach J. A. Gaunt¹⁾ korrigiert. Bemerkenswert ist dabei die ganz verschiedene Anordnung der Rechnung: Bei uns Summation über alle Richtungen (α, β), bei Oppenheimer und Sugiura Summation über alle Werte des Separationsparameters; bei uns die Voranstellung der ebenen Welle nicht nur beim einfallenden, sondern auch beim austretenden Elektron als anschaulichen Grundelements des Bremsvorganges, bei Oppenheimer und Sugiura die Rechnung mit dem analytisch definierten System der Eigenfunktionen, das zur gegebenen Energie des Endzustandes gehört. Daß beide Methoden zum gleichen Ergebnis führen müssen, geht aus dem Charakter der Orthogonalität und Vollständigkeit (Note 10) hervor, der sowohl unserem System ebener Wellen wie dem der Eigenfunktionen zukommt.

1) J. A. Gaunt, Ztschr. f. Phys. 59. S. 508. 1930.

§ 9. Polarisation und Intensität an der kurzwelligen Grenze

Unsere Rechnung zeigt: die Polarisation ist auch an der Grenze des kontinuierlichen Spektrums nicht vollständig. Dies ist in Einklang mit dem Ergebnis der Oppenheimerschen Rechnung (a. a. O.) und steht in Widerspruch zu der von mir geäußerten Vermutung (a. a. O. Nat. Ac.), die sich auf den Augenschein unserer Fig. 3 stützte: Mit $v_2 = 0$ sollte die Vorzugsrichtung des einfallenden Strahles rein zum Ausdruck kommen. Aber dieser Augenschein trügt, wie unsere Rechnung und auch die Vorstellung der klassischen Bahnen zeigt; denn mit $v_2 = 0$ geht die klassische Hyperbel- in eine Parabelbahn über und diese liefert nicht nur x - sondern auch y - und z -Beschleunigungen.

Zur Diskussion der Gl. (84) erinnern wir an die Verhältnisse von Kulenkampffs Messungen (a. a. O.); Antikathodenfilm aus Al, $Z = 13$, Spannung 30 kV, also rund $v_1 = 10^{10}$, $k_1 = 10^{10}$, $k_1 a = 50$, $|n_1| = \frac{Z}{k_1 a} = \frac{1}{4}$.

Wir betrachten das „Depolarisationsverhältnis“ (bei Beobachtung in der y -Richtung)

$$(85) \quad D = \frac{M_y^2}{M_x^2},$$

welches eine reine Funktion von $n = n_1$ ist und setzen zunächst $|n|$ als hinreichend *klein* voraus. Dann wird auch das Argument von L (nämlich, vgl. (82), $4n \cos^2 \frac{\alpha}{2}$) klein und wir können die Reihe (50) benutzen. Diese liefert für das angegebene Argument:

$$\begin{aligned} L &= 1 - 4n^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4n^3 (n-1) \cos^4 \frac{\alpha}{2} - \dots, \\ L' &= -n \left(1 - 2n(n-1) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{4}{3} n^2 (n-1) \right. \\ &\quad \left. \cdot (n-2) \cos^4 \frac{\alpha}{2} - \dots \right). \end{aligned}$$

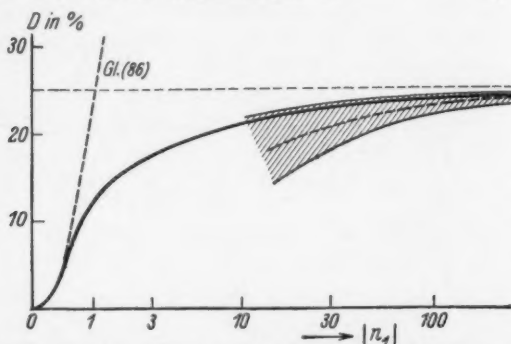
Daraus folgt bis auf höhere Glieder in n als n^4 :

$$(85a) \quad \begin{cases} |L'|^2 = |n|^2 \left(1 - 4n^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{4n^3}{3} \cos^4 \frac{\alpha}{2} - \dots \right), \\ \int d\alpha \sin^3 \alpha |L'|^2 = \frac{4}{3} |n|^2 \left(1 + \frac{8}{5} |n|^2 + \dots \right), \\ \int d\alpha \sin \alpha |L - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} L'|^2 = 2 \left(1 + \frac{8}{3} |n|^2 + \dots \right). \end{cases}$$

Hieraus nach (84) und (85)

$$(86) \quad D = \frac{|n|^2}{3} \frac{1 + \frac{2}{3}|n|^2}{1 + \frac{2}{3}|n|^2}.$$

Für $n = 0$ ist $D = 0$, die Polarisation also vollständig. Für $|n| = \frac{1}{4}$ wird $D = 2$ Proz., was ebenfalls praktisch vollständige Polarisation bedeutet. Für $|n| = 1$ gibt unsere Näherung etwa $D = 23$ Proz., ist hier aber bereits unzuverlässig. $|n| = 1$ bedeutet: Röhrenspannung $V =$ Ionisationsspannung V_k für die K -Schale der Atomnummer Z .



Depolarisationsverhältnis für die Grenze des kontinuierlichen Spektrums.

Näherung für kleine $|n_1|$ die punktierte Parabel,
erste Näherung für große $|n_1|$ die horizontale Asymptote für $D = 25\%$,
zweite Näherung (ungenau berechnet) der schraffierte Streifen.

Die Skala ist logarithmisch

Fig. 4

Wir gehen über zu großen Werten von $|n|$ (kleinen Geschwindigkeiten), in welchem Falle statt der Reihe die asymptotische Darstellung (O) aus Note 8 zu verwenden ist; der Winkel kann dabei als klein vorausgesetzt werden, vgl. (E), (F) in Note 8. Wir haben dann:

$$(87) \quad \begin{cases} M_s^2 = \frac{C}{2} \frac{e^2 |n|^2}{3 \cdot 64} \int_0^\pi \alpha^5 d\alpha |H_{1/2}(s)|^2, & s = \frac{i}{6} |n| \alpha^3, \\ M_x^2 = C \cdot \frac{e^2 |n|^2}{3 \cdot 64} \int_0^\pi \alpha^5 d\alpha |H_{3/2}(s)|^2. \end{cases}$$

Führen wir im Anschluß an Kramers (a. a. O. Note 8)

$$\gamma = |n| \frac{\alpha^2}{2}$$

als neue Integrationsvariable ein, so kommt statt (87)

$$\mathbf{M}_z^2 = \frac{C}{2|n|^2} \frac{e^{2|n|\pi}}{9 \cdot 16} \int_0^\infty \gamma d\gamma \left| H_{1/2} \left(\frac{i\gamma}{3} \right) \right|^2,$$

$$\mathbf{M}_x^2 = \frac{C}{|n|^2} \frac{e^{2|n|\pi}}{9 \cdot 16} \int_0^\infty \gamma d\gamma \left| H_{1/2} \left(\frac{i\gamma}{3} \right) \right|^2.$$

Man hat also:

$$D = \frac{\mathbf{M}_z^2}{\mathbf{M}_x^2} = \frac{1}{2} \frac{Q_{1/2}}{Q_{3/2}}, \quad Q_p = \int_0^\infty \gamma d\gamma \left| H_p \left(\frac{i\gamma}{3} \right) \right|^2.$$

Den Wert von Q_p findet man durch Grenzübergang aus einer Art Greenscher Gleichung¹⁾:

$$Q_p = \frac{18p}{\pi \sin \pi p}.$$

Daraus folgt einfach

$$(87a) \quad D = \frac{1}{4}.$$

Die Depolarisation steigt also mit wachsendem $|n|$ (abnehmender Geschwindigkeit) von 0 bis 25 Proz.; vgl. Fig. 4. Fig. 5 bei Oppenheimer a. a. O. ist daraufhin zu korrigieren.

Daß sich die Kurve für D der Asymptote $D = \frac{1}{4}$ von unten her nähert, wie in Fig. 4 gezeichnet, ist durch mühsame numerische Rechnung von Hrn. Maue kontrolliert worden.

Natürlich gibt D die Depolarisation nur bei Beobachtung unter 90° gegen die Einfallrichtung der Elektronen richtig wieder. Bei Beobachtung unter einem Winkel Θ ist die Definition in bekannter Weise um ein Glied mit $\sin^2 \Theta$ abzuändern.

Wir gehen zur Intensität der Strahlung über. Bei Beobachtung in der y -Richtung ist sie proportional $\mathbf{M}_x^2 + \mathbf{M}_z^2$, also für harte Strahlung, $|n_1| \ll 1$, angenähert proportional \mathbf{M}_x^2 ,

1) Vgl. Jahnke-Emde, S. 166, Z. 4 v. o. Man setze hier

$$\alpha = \frac{i}{3}, \quad \beta = -\frac{i}{3} + s, \quad Z_p = H_p^{(1)}, \quad \bar{Z}_p = H_p^{(2)},$$

erstrecke das Integral von η bis ∞ und gehe zur Grenze $s \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$ über.

d. i. nach Gl. (84) und (85a) soviel als $2C$. Der hinzutretende Proportionalitätsfaktor setzt sich aus fünf Teilen zusammen:

a) den Normierungsfaktoren N_1, N_2 von ψ_1 und ψ_2 , beide im Quadrat. Nach Gl. (E) in Note 10 ist

$$N_1^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i n_1}{1 - e^{-2\pi i n_1}}$$

und für $n_2 \rightarrow \infty$ d. h. $k_2 \rightarrow 0$

$$N_2^2 = \frac{i n_2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{Z}{a k_2};$$

b) dem Faktor ω^4 in der Formel des Hertz'schen Dipols. Nach Gl. (57) ist ω proportional $k_1^2 - k_2^2$, also für $k_2 = 0$

$$\omega^4 \sim k_1^8.$$

c) Dazu kommt als Normierungsfaktor „in bezug auf den Impulsraum“ für die austretende Welle

$$4\pi k_2^2.$$

In Zusatz 10 haben wir nämlich die Eigenfunktionen ψ im Impulsraum (Intervall ΔP_z) normiert. Dementsprechend ist auch bei Berechnung der Ausstrahlung über den Impulsraum zu integrieren. Die Mittelung, welche von M_q zu \mathbf{M}_q^2 (Gl. (59)) führte, bestand in der Integration über α und β . Das bedeutet im Impulsraum des austretenden Elektrons: Integration über die Kugeloberfläche $4\pi k_q^2$.

d) Die einfallende Elektronenwelle wollen wir dagegen auf die Einheit des Stromes (ein Elektron pro Zeiteinheit) beziehen. Bei der ungestörten ebenen Welle e^{ikz} ergibt das den Faktor $1/k$. Derselbe Faktor, nämlich $1/k_1$ tritt in unserem Falle hinzu, da wir den Unterschied zwischen der ungestörten und der gestreuten ebenen Welle schon in a) berücksichtigt haben.

e) Die Beobachtung betrifft die Frequenzskala ν und liefert die Energie

$$I_\nu d\nu.$$

Wegen (57) ist

$$d\nu \sim -2k_2 dk_2.$$

Unsere Rechnung im Impulsraum liefert $I_k |dk_2|$ und es ist

$$I_\nu d\nu = I_k |dk_2|,$$

$$I_\nu = I_k \frac{|dk_2|}{d\nu} \sim I_k \frac{1}{2k_2}.$$

Als fünfter Bestandteil tritt daher hinzu $1/k_2$.

Indem wir unsere Faktoren a) bis e) mit $2C$ vereinigen und universelle Faktoren fortlassen, erhalten wir:

$$\frac{Z}{a k_2} \cdot k_1^8 \cdot k_2^2 \cdot \frac{1}{k_1 k_2} \cdot |n_1|^3 \frac{e^{-2\pi i n_1}}{1 - e^{-2\pi i n_1}} \cdot \frac{1}{k_1^8}.$$

Wir berücksichtigen $|n_1| = \frac{Z}{a k_1}$ und heben den Faktor k_2^2 im Nenner gegen k_2^2 im Zähler fort:

$$(87b) \quad \frac{Z^4}{a^4 k_1^4} \left/ \left(e^{2\pi \frac{Z}{a k_1}} - 1 \right) \right. = \frac{n_1^4}{e^{2\pi |n_1|} - 1}.$$

Also das Resultat: Die Intensität an der kurzwelligen Grenze ($v = v_g$) fällt von einem endlichen Grenzwerte unstetig auf Null ab.

Da $|n_1|^2 = \frac{V_k}{V}$ ist (V_k = Ionisierungsspannung der K-Schale des Kernes Z , vgl. S. 290), so kann man statt (87b) auch schreiben

$$(87c) \quad \left(\frac{V_k}{V} \right)^2 \left/ \left(e^{2\pi \sqrt{\frac{V_k}{V}}} - 1 \right) \right.$$

Daß wir in (87b) den Grenzübergang $|n_1| \rightarrow 0$, den wir im Anfang dieses Paragraphen bei der Berechnung der Matrixelemente benutzten, unterlassen haben, scheint inkonsequent, ist aber dadurch begründet, daß der Nenner des Normierungsfaktors gegen diesen Grenzübergang empfindlicher ist, als die vorangehenden Rechnungen.

§ 10. Allgemeiner Verlauf des kontinuierlichen Spektrums

Im Gegensatz zu § 8 sei jetzt $k_2 \neq 0$, d. h. das austretende Elektron verlasse den Kern mit einer Geschwindigkeit $v_2 > 0$. Dann gilt wie bisher (von den Normierungsfaktoren abgesehen):

$$\psi_1 = e^{i k_1 x} L(u_1, n_1), \quad u_1 = i k_1 \eta, \quad n_1 = \frac{Z}{i k_1 a},$$

aber es wird

$$\psi_2 = e^{i k_2 x'} L(u_2, n_2), \quad u_2 = i k_2 \eta', \quad n_2 = \frac{Z}{i k_2 a}.$$

n_2 ist also im Gegensatz zu § 8 endlich und L_2 artet nicht in die Besselsche Funktion aus.

Nach (36) und (36a) schreiben wir $x' = r - \eta'$; benutzen wir überdies die Darstellung (47) für L mit dem Argumente $i k_2 \eta'$, und nennen die Integrationsvariable jetzt u , so wird

$$\psi_2 = \frac{e^{i k_1 r}}{2 \Gamma(n_2 + 1)} \int_0^\infty \left(\frac{u^2}{4}\right)^{n_2} e^{-\frac{u^2}{4}} I_0(u \sqrt{i k_2 \eta'}) u du.$$

Gehen wir zum konjugiert Komplexen über ($-n_2$ an Stelle von n_2 usw.) und schreiben v statt $u^2/4$, so ergibt sich

$$(88) \quad \psi_2^* = \frac{e^{-i k_2 r}}{\Gamma(-n_2 + 1)} \int_0^\infty v^{-n_2} e^{-v} I_0(2 \sqrt{-i k_2 \eta' v}) dv.$$

Für das Argument von I_0 schreiben wir im Anschluß an Gl. (61) bis (63)

$$R = 2 \sqrt{-i k_2 \eta' v} = \sqrt{\varrho^2 + \sigma^2 - 2 \varrho \sigma \cos(\varphi - \beta)},$$

Hier bedeuten ϱ und σ im Gegensatz zu Gl. (63a):

$$(88a) \quad \varrho = 2 \sqrt{-i k_2 \xi v} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \sigma = 2 \sqrt{-i k_2 \eta v} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Die Integration nach φ läßt sich jetzt wie früher, vgl. (64), ausführen und liefert:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \psi_2^* d\varphi &= e^{-i k_2 r} \frac{2\pi}{\Gamma(-n_2 + 1)} \int_0^\infty v^{-n_2} e^{-v} I_0(\varrho) I_0(\sigma) dv, \\ \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} \psi_2^* d\varphi &= e^{-i k_2 r} \frac{2\pi}{\Gamma(-n_2 + 1)} \int_0^\infty v^{-n_2} e^{-v} I_1(\varrho) I_1(\sigma) dv. \end{aligned}$$

Die weitere Rechnung verläuft wesentlich ebenso wie in § 8. Man hat die vorstehenden Ausdrücke mit ψ , sowie mit

$$\frac{1}{8}(\xi^2 - \eta^2) d\xi d\eta \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{4}(\xi + \eta) \sqrt{\xi \eta} d\xi d\eta$$

zu multiplizieren und über ξ, η von 0 bis ∞ zu integrieren. Die unbequemen Faktoren $\xi^2 - \eta^2$ und $\xi + \eta$ schaffen wir wieder durch Differentiation weg, indem wir für das Produkt der beiden Exponentialfaktoren $e^{i k_1 x}$ und $e^{-i k_2 r}$ setzen:

$$e^{i k_1 x} \cdot e^{-i k_2 r} = e^{-p(\xi - \eta)} e^{-q(\xi + \eta)},$$

$$(89) \quad p = \frac{-i k_1}{2}, \quad q = \frac{i k_2}{2},$$

wobei wir aber so rechnen, als ob q einen positiven Realteil habe (vgl. S. 284 oben).

Wir schreiben ähnlich wie in (70)

$$(90) \quad \begin{cases} M_x = \frac{\pi}{4} \frac{d^2}{dp dq} \frac{1}{\Gamma(-n_2+1)} \int_0^\infty v^{-n_2} e^{-v} X Y dv, \\ \left\{ \frac{M_y}{M_z} \right\} = -\frac{\pi}{4} \left\{ \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right\} \frac{d}{dq} \frac{1}{\Gamma(-n_2+1)} \int_0^\infty v^{-n_2} e^{-v} X_1 Y_1 dv. \end{cases}$$

Die X, Y, \dots haben hier dieselbe Bedeutung wie in (71). Wir übernehmen ihre Werte aus (74a, b), (78a, b) mit

$$(91) \quad \begin{cases} r = r_1 \sqrt{v}, & r_1 = \sqrt{-i k_2} \sin \frac{\alpha}{2}, \\ s = s_1 \sqrt{v}, & s_1 = \sqrt{-i k_2} \cos \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Durch Einsetzen in (90) folgt ähnlich wie in (79)

$$(92) \quad M_x = \frac{\pi}{4} \frac{d^2 V}{dp dq}, \quad \left\{ \frac{M_y}{M_z} \right\} = \frac{\pi}{2} r_1 s_1 \left\{ \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right\} \frac{d V_1}{dq},$$

$$V = \frac{1}{\Gamma(-n_2+1)} \int_0^\infty v^{-n_2} e^{-v} \Phi L dv,$$

$$V_1 = \frac{1}{\Gamma(-n_2+1)} \int_0^\infty v^{-n_2+1} e^{-v} (\Phi_1 L + \Phi_2 L') dv.$$

Die Φ sind durch (80) gegeben, das Argument von L ist dasselbe wie in Gl. (78). Wir setzen $w = w_1 v$, so daß w_1 aus w hervorgeht, wenn man s mit s_1 vertauscht.

Zur Ausrechnung der V benutzen wir die Reihe (50) für L , nachdem wir vorher mit Hilfe von Gl. (46a) von L_{n_1} zu L_{-n_1-1} übergegangen sind. Die Integrale der einzelnen Glieder werden dann Γ -Funktionen. Das m -te Glied liefert:

$$\int_0^\infty v^{-n_2} e^{-v} T (w_1 v)^m dv = T^{n_2-1} \left(\frac{w_1}{T} \right)^m \Gamma(-n_2+1+m).$$

Der Exponent T , der zum Teil von Φ , Gl. (80), herrührt bedeutet:

$$(93) \quad T = 1 + \frac{r_1^2}{q+p} + \frac{s_1^2}{q-p-i k_1}.$$

Unsere Reihe schreitet nach Potenzen von

$$(93a) \quad x = \frac{-w_1}{T} = \frac{i k_1 s_1^2}{T(q-p)(q-p-i k_1)}$$

fort und erweist sich als gewöhnliche hypergeometrische Reihe

$$(93b) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

mit

$$\alpha = 1 + n_1, \quad \beta = 1 - n_2, \quad \gamma = 1.$$

Man hat nämlich

$$(94) \quad V = QF, \quad F = F(1 + n_1, 1 - n_2, 1, x);$$

$$Q = \frac{1}{q^2 - p^2} \left(\frac{q - p - n_1}{q - p - i k_1} \right)^{-n_1} \cdot T^{n_2 - 1}.$$

und wegen $L' = e^w L(-w) + e^w \frac{d}{dw} L(-w)$:

$$(95) \quad \begin{cases} V_1 = Q_1 F_1 + Q_2 F', \\ F_1 = F(1 + n_1, 2 - n_2, 1, x), \quad F' = \frac{dF}{dx}. \end{cases}$$

$$Q_1 = -\frac{Q}{T} \cdot \frac{1 - n_2}{(q + p)(q - p - i k_1)}, \quad Q_2 = \frac{-i k_1}{(q - p)(1 - n_2)} Q_1.$$

Dabei ist benützt, daß

$$\Gamma(a + 1) = a \Gamma(a); \quad \frac{d}{dw} = \frac{1}{v} \frac{d}{dw_1}, \quad \frac{dF}{dw_1} = -\frac{F'}{T}.$$

Somit kommt statt (92)

$$(96) \quad \begin{cases} M_x = \frac{\pi}{4} \frac{d^2}{dp dq} QF, \\ \begin{Bmatrix} M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \frac{-i\pi}{4} k_2 \sin \alpha \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{Bmatrix} \frac{d}{dq} (Q_1 F_1 + Q_2 F'). \end{cases}$$

Zur allgemeinen Ausrechnung von (96) merken wir an, daß die hypergeometrische Funktion F nur mittels des Argumentes x von p und q abhängt. Also:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dq} &= F' \frac{dx}{dq}, \quad \frac{dF'}{dq} = F'' \frac{dx}{dq}, \\ \frac{d^2 F}{dp dq} &= F'' \frac{dx}{dp} \frac{dx}{dq} + F' \frac{d^2 x}{dp dq} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Nach (93a) wird aber für $p = \frac{-i k_1}{2}$, $q = \frac{i k_2}{2}$ (vgl. (89)),

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 k_1 k_2}{k'^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{dx}{dp} = \frac{8 i k_1 k_2^2}{k k'^3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{dx}{dq} = 0, \\ \frac{d^2 x}{dp dq} &= \frac{32 k_1 k_2}{k^3 k'^2} (1 - x) \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Hier ist nach Ausführung der Differentiation gesetzt worden:

$$q - p = \frac{i(k_1 + k_2)}{2} = \frac{i k'}{2}, \quad p + q = \frac{-i(k_1 - k_2)}{2} = \frac{-i k}{2}.$$

Wegen $\frac{dx}{dq} = 0$ fällt F'' aus unserer ausgerechneten Darstellung (96) heraus: die M drücken sich zweigliedrig in F, F' und F_1 aus. Man hat zunächst:

$$M_x = \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{d^2 Q}{dp dq} F + Q \frac{d^2 x}{dp dq} F' \right\},$$

$$M_y \Big\} = -\frac{i\pi}{4} k_2 \sin \alpha \left\{ \begin{matrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{matrix} \right\} \left[\frac{d Q_1}{dq} F_1 + \frac{d Q_2}{dq} F' \right].$$

Hierbei ist bereits benutzt, daß dQ/dq verschwindet (mit Rücksicht auf $k_1 n_2 = k_2 n_1$). Ferner wird

$$Q = \frac{4}{k'^2} \left(\frac{k}{k'} \right)^{n_1 - n_2} (-1)^{-n_1}, \quad Q_1 = \frac{16(-n_2 + 1)}{k k'^2} \left(\frac{k}{k'} \right)^{n_1 - n_2} (-1)^{-n_1},$$

$$Q_2 = -\frac{32 k_1}{k k'^2} \left(\frac{k}{k'} \right)^{n_1 - n_2} (-1)^{-n_1},$$

$$\frac{1}{Q_1} \frac{d Q_1}{dq} = -\frac{4 i k_1}{k k'}, \quad \frac{1}{Q_2} \frac{d Q_2}{dq} = \frac{-2 i}{k},$$

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{dp dq} = \frac{-16 k_1 k_2}{k^2 k'^2} (n_1 + 1 - (n_2 - 1) \cos \alpha).$$

Durch Einsetzen erhält man

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_x = -A \left\{ [(n_1 + 1) - (n_2 - 1) \cos \alpha] F - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} (1 - x) F' \right\}, \\ M_y \Big\} = A \sin \alpha \left\{ \begin{matrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{matrix} \right\} \{ (n_2 - 1) F_1 + F' \}, \\ A = \frac{16 \pi k_1 k_2}{k^2 k'^4} \left(\frac{k}{k'} \right)^{n_1 - n_2} (-1)^{-n_1}, \quad x = \frac{4 k_1 k_2}{k'^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \end{array} \right.$$

§ 11. Verlauf von Polarisation und Intensität im kontinuierlichen Spektrum

Es handle sich um schnelle Kathodenstrahlen ($|n_1| \ll 1$, vgl. § 9). Wir betrachten z. B. außer der Grenzfrequenz ν_g die Stellen des kontinuierlichen Spektrums:

$$\nu = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0 \right) \nu_g.$$

Nach Gl. (57) wird

$\frac{\nu}{\nu_g} = 1$	$\frac{v_2}{v_1} = \frac{k_2}{k_1} = 0$	$\frac{n_2}{n_1} = \infty$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
0	1	1

Wir können hiernach sagen, daß $|n_2|$ für die ganze Ausdehnung des Spektrums, abgesehen von der nächsten Nachbarschaft der Grenze, zugleich mit $|n_1|$ klein wird.

Um den Grenzübergang $|n_1| \rightarrow 0$, $|n_2| \rightarrow 0$ bequem ausführen zu können, wollen wir die Gl. (97) so umschreiben, daß in ihnen n_1 und n_2 als Faktoren heraustreten. Zunächst zeigt man leicht auf Grund der Reihendarstellung für F und F_1 :

$$(n_2 - 1)F_1 + F' = n_1(1 - n_2)F(1 + n_1, 2 - n_2, 2, x);$$

der Grenzübergang auf der rechten Seite liefert unmittelbar

$$n_1(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{n_1}{1 - x}.$$

Man hat also statt (97)

$$\frac{M_x}{M_s} = A \sin \alpha \left\{ \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right\} \frac{n_1}{1 - x}.$$

M_x fasse man zunächst so zusammen:

$$M_x = -A \{ (n_1 - n_2 \cos \alpha)F + (1 + \cos \alpha)(F - (1 - x)F') \}.$$

Man beweist aber, ebenfalls aus der Reihendarstellung für F :

$$F - (1 - x)F' = (n_2 - n_1)F + n_1 n_2 F(1 + n_1, 1 - n_2, 2, x).$$

Durch Grenzübergang folgt daher

$$\begin{aligned} M_x &= -A \left\{ \frac{n_1 - n_2 \cos \alpha}{1 - x} + \frac{(n_2 - n_1)(1 + \cos \alpha)}{1 - x} \right\} \\ &= A \frac{n_1 \cos \alpha - n_2}{1 - x} = A n_1 \frac{\cos \alpha - \frac{k_1}{k_2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

Wir bilden jetzt, mit Rücksicht auf den Wert von x in (97):

$$(98) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{M}_y^2 &= \mathbf{M}_x^2 = \frac{1}{4} |A n_1|^2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \alpha \, d\alpha}{\left(1 - \frac{4 k_1 k_2}{k'^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2} \\ &= |A n_1|^2 \left(\frac{k'^2}{2 k_1 k_2}\right)^2 \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2 k_1 k_2} \log \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} - 1\right), \\ (98a) \quad \mathbf{M}_z^2 &= \frac{1}{2} |A n_1|^2 \int_0^\pi \frac{\left(\cos \alpha - \frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin \alpha \, d\alpha}{\left(1 - \frac{4 k_1 k_2}{k'^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2} \\ &= 2 |A n_1|^2 \left(\frac{k'^2}{2 k_1 k_2}\right)^2 \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2 k_1 k_2} \log \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} + 1\right). \end{aligned} \right.$$

Daraus folgt:

$$(99) \quad \left\{ \begin{aligned} D &= \frac{\mathbf{M}_y^2}{\mathbf{M}_x^2} = \frac{\frac{k_1^2 + k_2^2}{2 k_1 k_2} \log \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} - 1}{2 \left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2 k_1 k_2} \log \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} + 1\right)}. \end{aligned} \right.$$

Für $k_2 = 0$ ergibt sich durch Entwicklung des Zählers $D = 0$, welcher Wert sich demjenigen in § 9 bei kleinem n_1 anschließt. Dieser Anschluß ist nicht selbstverständlich, weil die vorstehende Formel ihrer Ableitung nach für $k_2 = 0$ ($n_2 = \infty$) nicht mehr legitim ist. $k_2 = 0$ entspricht der Grenze $\nu = \nu_g$.

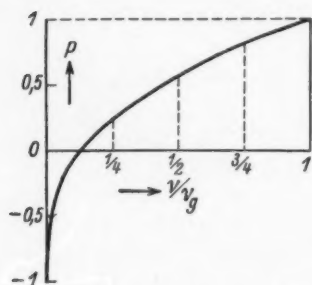
Für $\nu = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0\right) \nu_g$ erhält man nun durch Ausrechnung von (99) die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte von D . Von D gehen wir über zu dem in üblicher Weise definierten Polarisationsgrade

$$P = \frac{1-D}{1+D}.$$

$\frac{\nu}{\nu_g} = 1$	$D = 0$	$P = 1$
$\frac{3}{4}$	0,10	0,82
$\frac{1}{2}$	0,27	0,57
$\frac{1}{4}$	0,61	0,24
0	∞	-1

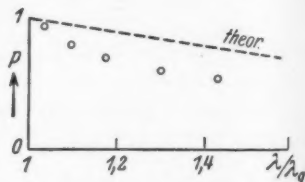
$P = -1$ heißt vollständige Polarisation in der Richtung senkrecht zum Einfall der Kathodenstrahlen. Den Verlauf von P zeigt Fig. 5. Tragen wir P nicht zur Abszisse v , sondern zur Abszisse λ/λ_g auf, so erhalten wir Fig. 6, welche mit einer experimentellen Figur von Kulenkampff¹⁾ zu vergleichen ist. Daß die Beobachtungspunkte merklich unter der theoretischen Kurve liegen, dürfte seinen Grund in der immerhin endlichen Dicke (einige Mikron) der von Kulenkampff benutzten

Antikathoden und in dem unvollständigen Monochromatismus seiner (gefilterten) Strahlung haben.



Die Verteilung der Polarisation über das kontinuierliche Spektrum, Skala der v

Fig. 5



Polarisation in der Skala der λ , Vergleich mit Beobachtungen von Kulenkampff

Fig. 6

Wir kommen zur *Intensitätsverteilung* im kontinuierlichen Spektrum. Die Beobachtungsrichtung sei die y -Achse. Dann kommt es zunächst an auf

$$(99a) \quad \mathbf{M}_x^2 + \mathbf{M}_z^2 = |A n_1|^2 \left(\frac{k'^2}{2 k_1 k_2} \right)^2 \left\{ \frac{3 k_1^2 - k_2^2}{2 k_1 k_2} \log \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} + 1 \right\}.$$

Dazu treten aber noch die S. 292 erklärten Faktoren a), b), c), d), e), die wegen $k_2 \neq 0$ jetzt lauten:

$$a) \quad N_1^2 N_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{|n_1 n_2|}{(1 - e^{-2\pi i n_1})(1 - e^{-2\pi i n_2})},$$

$$b) \quad \omega^4 \sim (k_1^2 - k_2^2)^4 = k^4 k'^4,$$

$$c) \quad 4\pi k_2^2, \quad d) \quad \frac{1}{k_1}, \quad e) \quad \frac{d k_2}{d v} \sim \frac{1}{k_2}.$$

1) H. Kulenkampff, Physikal. Ztschr. 30. S. 514. 1929.

Vereinigen wir sie mit dem Faktor vor der $\{\}$ in (99a), so erhalten wir mit Rücksicht auf den Wert von A in (97);

$$(99b) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{\nu} = \frac{C}{1 - e^{-2\pi|n_2|}} \left\{ \frac{3k_1^2 - k_2^2}{2k_1k_2} \log \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} + 1 \right\}, \\ C = \frac{|n_1|^4}{e^{2\pi|n_1|} - 1}, \end{array} \right.$$

wo C für alle Stellen des Spektrums denselben Wert hat. Dasselbe gilt näherungsweise für den Nenner $1 - e^{-2\pi|n_2|}$ außer bei sehr kleinen n_2 . Für $k_2 = 0$ schließt sich die jetzige Formel stetig an Gl. (87b) an. Wir berechnen die $\{\}$ für dieselben Stellen ν/ν_g wie vorher:

$\frac{\nu}{\nu_g} = 1$	$\frac{k_2}{k_1} = 0$	$\{\} = 4,0$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	4,0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	4,1
$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	4,4

Wir haben also merklich $I_{\nu} = \text{const}$ von $\nu = \nu_g$ bis nahe an $\nu = 0$ heran, vgl. Fig. 7.

In der Beobachtung wird die spektrale Verteilung am besten nach der Methode der *Isochromaten* untersucht. Man hält dabei die ausgestrahlte Frequenz ν fest und variiert die Spannung V . Für $V < V_g$ hat man $I = 0$, wo V_g diejenige Spannung ist, für die $\nu = \nu_g$ ist. Bei $V = V_g$ setzt I mit einem endlichen Wert ein, nämlich mit dem in § 9 berechneten, zu $\nu = \nu_g$ gehörigen Wert (87b) resp. (87c). Nach Gl. (57) ist, wenn wir $h\nu = eV_g$ setzen:

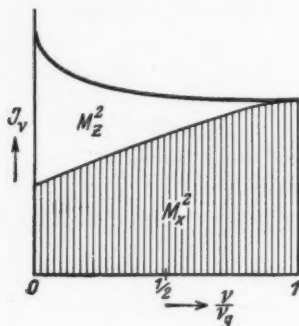
$$\begin{aligned} k_1^2 - k_2^2 &= \alpha V_g, \quad \alpha = 2me \left(\frac{2\pi}{h} \right)^2, \\ k_1^2 &= \alpha V, \quad k_2^2 = \alpha (V - V_g). \end{aligned}$$

Wählen wir als Abszisse der Isochromatenfigur den relativen Abstand von der Grenze V_g , nämlich

$$x = \frac{V - V_g}{V_g},$$

so hat man

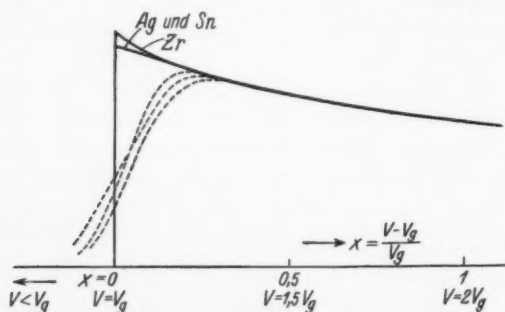
$$k_1^2 = \alpha V_g (1 + x), \quad k_2^2 = \alpha V_g x, \quad \frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{x}{1+x}.$$



Verteilung der Intensität in der Skala der ν über das kontinuierliche Spektrum. Beobachtungsrichtung = y -Achse, senkrecht zur Einfallsrichtung. Zusammensetzung der Ausstrahlung aus den beiden Bestandteilen, die von den gemittelten Matrixelementen M_z^2 und M_x^2 herrühren

Fig. 7

Man kann hiernach alle drei Faktoren, aus denen sich (99b) zusammensetzt, durch x ausdrücken. C hängt von k_1^2 , der Nenner $1 - e^{-2\pi|n_z|}$ von k_2 und die $\{\}$ von k_2/k_1 ab, alle



Ausgezogene Kurven: Theoretischer Verlauf der Isochromate für Filterung durch Zr, Ag oder Sn. Punktierte Kurven: Von Kulenkampff beobachtete Isochromatenkurven, unter sich und mit den theoretischen Kurven identisch bei größerem Abstand von der Anregungsgrenze, in der Nähe der Anregungsgrenze modifiziert durch mangelhaften Monochromatismus. Die Ordinatenmaßstäbe sind so gewählt, daß die Punkte für $x = 0,5$ zusammenfallen

Fig. 8

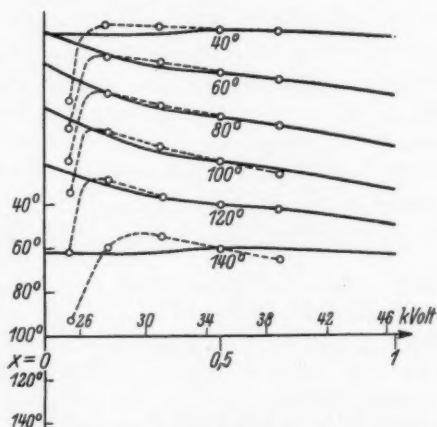
drei Faktoren variieren daher längs der Kurve. Die auf diese Weise entstehende Fig. 8 ist zu vergleichen mit der Fig. 7 bei Kulenkampff, a. a. O.; man konstatiert gute Übereinstimmung, wenn man bedenkt, daß die theoretisch scharfe Ecke für $V = V_g$ in der Beobachtung abgerundet erscheinen muß.

Erfolgt die Beobachtung nicht senkrecht zur Einfallsrichtung, so wird an Stelle von (99a) die Intensität bestimmt durch

$$(99c) \quad \begin{cases} M_x^2 \sin^2 \Theta + M_y^2 \cos^2 \Theta + M_z^2 = M_\Theta^2 + M_x^2, \\ M_\Theta^2 = M_x^2 \sin^2 \Theta + M_y^2 \cos^2 \Theta. \end{cases}$$

Θ ist der Winkel, den die Beobachtungsrichtung mit der Richtung des einfallenden Elektrons bildet (vgl. Fig. 10). Läßt man insbesondere $\Theta = 0$ werden, so verschwindet die Intensität zwar für $v = v_g$, weil dann, vgl. (98), M_x^2 verschwindet, aber im allgemeinen, für $v < v_g$, nicht. Dies ist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Kulenkampff und Duane, a. a. O., steht aber in Widerspruch mit der älteren Behandlung vom Jahre 1909 (geradliniger Bremsweg).

Die aus (99c) berechneten Isochromaten sind in Fig. 9 für verschiedene Θ dargestellt und mit der Fig. 8 bei Kulenkampff, a. a. O. verglichen.

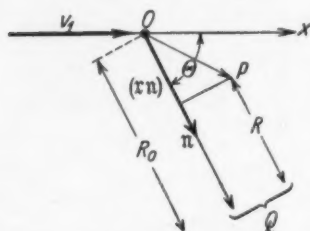


Isochromaten in Abhängigkeit von der Beobachtungsrichtung; theoretisch ausgezogen, experimentell punktiert nebst einigen Beobachtungspunkten. Die Ordinatennullpunkte der einzelnen Kurven sind am linken Rand angedeutet. Man beachte, daß für mittlere Beobachtungsrichtungen (80° und 100°) die Kurven theoretisch und experimentell am steilsten abfallen

Fig. 9

§ 13. Berechnung der Vorellung für die kurzwellige Grenze aus den retardierten Potentialen

Die Matrixelemente der Koordinaten geben bekanntlich die Ausstrahlung nur dann richtig an, wenn man von der Retardierung absieht, also nur für sehr langwellige Ausstrahlung. Eine nach heutigen Begriffen exaktere Berechnung ermöglichen die elektrodynamischen Potentiale, wenn man in diesen für die Dichte ρ und den Strom I diejenigen Werte einsetzt, die wellen-



Schema des Retardierungsvorganges

Fig. 10

mechanisch dem Übergange aus dem Anfangs- in den Endzustand entsprechen, und zwar für die retardierte Ausstrahlungszeit. Da das Verfahren in letzter Zeit mehrfach beschrieben ist¹⁾, genüge hier eine kurze Andeutung.

Es sei (Fig. 10) R bzw. R_0 der Abstand des (unendlich fernen) Aufpunktes Q vom Integrationspunkte P des Wellenfeldes bzw. vom Anfangspunkte O . Dann ist $R = R_0 - (r n)$, wo r der Vektor OP und n der Einheitsvektor in Richtung der Ausstrahlung OQ ist. Im Nenner der elektrodynamischen Potentiale kann R ersetzt werden durch R_0 , da wir Glieder höherer Ordnung in $1/R_0$ vernachlässigen dürfen. Im Zeitfaktor $\exp.(-i\omega t)$ dieser Potentiale ist nun t zu ersetzen durch

$$t - \frac{R}{c} = t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c} (r n);$$

den von den Integrationsvariablen unabhängigen Faktor

$$\frac{1}{R_0} e^{-i\omega \left(t - \frac{R_0}{c}\right)}$$

1) A. Rubinowicz, Physikal. Ztschr. 29. S. 817. 1928; Ztschr. f. Phys. 53. S. 267. 1929; J. Blaton, Ztschr. f. Phys. 61. S. 263. 1930; Y. Sugiura, Scient. Pap. Instit. of Phys. Chem. Research, Tokyo, Nr. 234, 1930, welche Arbeit mir vom Verf. freundlicher Weise in der Korrektur zugesandt wurde. Das Verfahren geht wohl auf O. Klein, Ztschr. f. Phys. 41. S. 407. 1927, zurück.

können wir unterdrücken. Wegen

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \kappa,$$

wo λ die ausgestrahlte Wellenlänge, κ die zugehörige Wellenzahl ist, lautet der Retardierungsfaktor

$$e^{-i\kappa(r,n)},$$

und das Vektorpotential (auf dieses können wir uns beschränken) nimmt abgesehen von konstanten Faktoren die Form an:

$$(100) \quad \begin{cases} \vec{A} = \int e^{-i\kappa(r,n)} \vec{I}_{12} d\tau, \\ \vec{I}_{12} = \dots (\psi_1 \text{ grad } \psi_2^* - \psi_2^* \text{ grad } \psi_1). \end{cases}$$

Das elektrische Feld der ausgestrahlten Welle ist der Richtung und Größe nach mit \vec{A} proportional, wenn man bei \vec{A} seinen radialen, in der Beobachtungsrichtung gelegenen Bestandteil streicht, der durch den Gradienten des skalaren Potentials kompensiert wird. Der Proportionalitätsfaktor ist wegen $E = -\frac{1}{c} \dot{A} - \text{grad } \varphi$ gleich $i\omega/c$.

In unseren parabolischen Koordinaten wird

$$(100a) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{\xi + \eta} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right),$$

$$(100b) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\xi + \eta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{\xi\eta}} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\xi + \eta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{\xi\eta}} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{cases}$$

$$d\tau = \frac{1}{4} (\xi + \eta) d\xi d\eta d\varphi,$$

$$(r,n) = \frac{1}{2} (\xi - \eta) \cos \Theta + \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi \sin \Theta,$$

wo Θ wieder den Beobachtungswinkel zwischen OQ und der x -Achse bedeutet; die Ebene $z=0$, d. h. $\varphi=0$ ist durch OQ hindurchgelegt gedacht. Wir setzen daraufhin:

$$(100c) \quad e^{-i\kappa(r,n)} = e^{-\frac{i}{2}\kappa(\xi-\eta)\cos\Theta} (1 - i\kappa\sqrt{\xi\eta} \sin\Theta \cos\varphi).$$

Dabei haben wir teilweise nach κ entwickelt und nur die erste Potenz in κ beibehalten. Dies ist berechtigt, da

$$\frac{\kappa}{k_1} = \frac{1}{2} \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1 c},$$

κ^2/k_1^2 also von der Größenordnung der Relativitätskorrektur ist, die wir ebenfalls vernachlässigen.

Aus dem gleichen Grunde genügt es, nur den einen der beiden Bestandteile von I_{12} in Gl. (100) für die Rechnung zu benutzen. Zum Beweise zeigen wir, daß das folgende Integral von zweiter Ordnung in κ^2 ist:

$$(100d) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int e^{-i\kappa(\mathbf{r}, \mathbf{n})} (\psi_1 \text{grad } \psi_2^* + \psi_2^* \text{grad } \psi_1) d\tau \\ & = \int e^{-i\kappa(\mathbf{r}, \mathbf{n})} \text{grad}(\psi_2^* \psi_1) d\tau = i\kappa \mathbf{n} \int e^{-i\kappa(\mathbf{r}, \mathbf{n})} \psi_2^* \psi_1 d\tau. \end{aligned} \right.$$

Hier haben wir eine partielle Integration ausgeführt und das Oberflächenintegral weggelassen, da es wegen des ohnehin nötigen Konvergenzfaktors verschwindet; ferner haben wir benutzt, daß $\text{grad}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \mathbf{n}$. Entwickeln wir nun im letzten Gliede von (100d) $\exp. \{-i\kappa(\mathbf{r}, \mathbf{n})\}$ nach Potenzen von κ , so gibt das Glied mit κ^0 wegen der Orthogonalität der ψ (Note 10) den Betrag Null. Infolgedessen wird die rechte Seite von (100d) wie behauptet von der Ordnung κ^2 . Wir können also (100d) von (100) abziehen, ohne dadurch den Ausdruck (100) in unerlaubter Weise abzuändern, und erhalten, wenn wir zugleich aus (100c) einsetzen:

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} & \vec{A} = \dots \int e^{-\frac{i}{3}\kappa(\xi - \eta) \cos \Theta} \\ & \cdot (1 - i\kappa \sqrt{\xi \eta} \sin \Theta \cos \varphi) \psi_2^* \text{grad } \psi_1 d\tau. \end{aligned} \right.$$

Wir führen zunächst die Integration nach φ aus. ψ_2 ist durch die Gl. (60) und (64) gegeben. Wir schreiben mit geringfügiger Änderung gegen früher:

$$(101a) \quad \psi_2 = \psi_2^* = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{(r)} I_r (2r \sqrt{\xi}) I_r (2s \sqrt{\eta}) e^{i r (\varphi - \beta)},$$

wobei die Größen r und s durch (73) und (75) gegeben sind. ψ_1 schreiben wir in der Form:

$$(101b) \quad \psi_1 = e^{\frac{i}{2}(k_1' \xi - k_1 \eta)} L_{n_1}(i k_1 \eta)$$

mit der Festsetzung, daß im Endresultat

$$(101) \quad k_1' = k_1$$

gesetzt werden soll. Dann vereinfacht sich die Bildung des Gradienten nach (100a, b) folgendermaßen:

$$(101d) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{2k_1}{\xi + \eta} \left(\frac{\partial}{\partial k_1'} - \frac{\partial}{\partial k_1} \right) e^{\frac{i}{2}(k_1' \xi - k_1 \eta)} L(i k_1 \eta),$$

$$(101e) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} \pm i \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi_1 &= \frac{2\sqrt{\xi\eta}}{\xi + \eta} e^{\pm i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ &\quad \cdot e^{\frac{i}{2}(k_1' \xi - k_1 \eta)} L(i k_1 \eta) \\ &= \frac{2i k_1 \sqrt{\xi\eta}}{\xi + \eta} e^{\pm i\varphi} e^{\frac{i k_1}{2}(\xi - \eta)} L'(i k_1 \eta). \end{aligned} \right.$$

Dabei ist zu beachten, daß die Differentiation nach k_1 nur soweit anzuführen ist, als k_1 explicite auftritt, nicht aber an dem Parameter n_1 . Entsprechend dieser Zusammenfassung des Gradienten bilden wir nach (101)

$$A_x \text{ und } A_y \pm i A_z.$$

Beidemale verschwinden von der unendlichen Summe nach ν alle Glieder bis auf 3; das sind bei A_x diejenigen für $\nu = 0, \pm 1$, bei $A_y \pm i A_z$ diejenigen für $\nu = 0, 1, 2$:

$$A_x : \int_0^{2\pi} (1 - i\pi\sqrt{\xi\eta} \sin \Theta \cos \varphi) e^{i\nu(\varphi - \beta)} d\varphi \\ = \begin{cases} 2\pi \text{ für } \nu = 0, \\ -i\pi\pi\sqrt{\xi\eta} \sin \Theta e^{\mp i\beta} \text{ für } \nu = \pm 1. \end{cases}$$

$$A_y \pm i A_z : \int_0^{2\pi} (1 - i\pi\sqrt{\xi\eta} \sin \Theta \cos \varphi) e^{\pm i\varphi} e^{\mp i\nu(\varphi - \beta)} d\varphi \\ = e^{\pm i\beta} \begin{cases} -i\pi\pi\sqrt{\xi\eta} \sin \Theta e^{\mp i\beta} \text{ für } \nu = 0, \\ 2\pi \text{ für } \nu = 1, \\ -i\pi\pi\sqrt{\xi\eta} \sin \Theta e^{\pm i\beta} \text{ für } \nu = 2. \end{cases}$$

Nimmt man beidemale die Summe der drei Glieder unter Hinzufügung der Faktoren I_ν aus (101a), so entsteht

$$(102) \quad \left\{ \begin{aligned} &A_x : 2\pi \left\{ I_0(2r\sqrt{\xi}) I_0(2s\sqrt{\eta}) \right. \\ &\quad \left. - i\pi\sqrt{\xi\eta} \sin \Theta \cos \beta \cdot I_1(2r\sqrt{\xi}) I_1(2s\sqrt{\eta}) \right\}, \\ &A_y \pm i A_z : 2\pi e^{\pm i\beta} \left\{ I_1(2r\sqrt{\xi}) I_1(2s\sqrt{\eta}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\pi}{2} \sqrt{\xi\eta} \sin \Theta \cdot \left[e^{\mp i\beta} I_0(2r\sqrt{\xi}) I_0(2s\sqrt{\eta}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{\pm i\beta} I_2(2r\sqrt{\xi}) I_2(2s\sqrt{\eta}) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Mittels der Relation

$$(102a) \quad I_{n \pm 1}(x) = \left(\frac{n}{x} \mp \frac{d}{dx} \right) I_n(x)$$

formt sich die erste Summe um in

$$(102b) \quad \begin{cases} \Omega_0 I_0(2r\sqrt{\xi}) I_0(2s\sqrt{\eta}), \\ \Omega_0 = 2\pi \left(1 - \frac{ix}{4} \sin \Theta \cos \beta \frac{d^2}{dr ds} \right), \end{cases}$$

die zweite in

$$(102c) \quad \begin{cases} \Omega_1 I_1(2r\sqrt{\xi}) I_1(2s\sqrt{\eta}), \\ \Omega_1 = 2\pi e^{\pm i\beta} \left\{ 1 - \frac{ix}{8} \sin \Theta e^{\mp i\beta} \left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{1}{s} + \frac{d}{ds} \right) \right. \\ \quad \left. - \frac{ix}{8} \sin \Theta e^{\pm i\beta} \left(\frac{1}{r} - \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{1}{s} - \frac{d}{ds} \right) \right\} \\ = 2\pi e^{\pm i\beta} \left\{ 1 - \frac{ix}{4} \sin \Theta \right. \\ \quad \left. \cdot \left[\left(\frac{1}{rs} + \frac{d^2}{dr ds} \right) \cos \beta \mp i \left(\frac{1}{r} \frac{d}{ds} + \frac{1}{s} \frac{d}{dr} \right) \sin \beta \right] \right\}. \end{cases}$$

Die Operatoren Ω_0 und Ω_1 sind unabhängig von ξ und η und können daher vor die diesbezüglichen Integrale gezogen werden. Diese Integrale selbst werden, wie in § 8, mit X, Y, \dots bezeichnet. Man erhält dann mit Rücksicht auf (101 d, e)

$$(103) \quad \begin{cases} A_x = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{\partial}{\partial k_1'} - \frac{\partial}{\partial k_1} \right) \Omega_0 X Y, \\ A_y \pm i A_z = \frac{1}{2} i k_1 \Omega_1 X_1 Y_1, \end{cases}$$

mit den Abkürzungen

$$(104) \quad \begin{cases} X = \int_0^\infty d\xi e^{-p\xi} I_0(2r\sqrt{\xi}), \quad p = -\frac{i}{2}(k_1' - x \cos \Theta), \\ X_1 = \int \sqrt{\xi} d\xi e^{-p\xi} I_1(2r\sqrt{\xi}), \\ Y = \int d\eta e^{-q\eta} I_0(2s\sqrt{\eta}) L_{n_1}(ik_1\eta), \\ \quad \quad \quad q = \frac{i}{2}(k_1 - x \cos \Theta), \\ Y_1 = \int \sqrt{\eta} d\eta e^{-q\eta} I_1(2s\sqrt{\eta}) L'_{n_1}(ik_1\eta). \end{cases}$$

Aus (74a, b) entnimmt man direkt:

$$(104a) \quad X = \frac{1}{p} e^{-\frac{r^2}{p}}; \quad X_1 = \frac{r}{p^2} e^{-\frac{r^2}{p}},$$

desgleichen aus (78) und (78a):

$$(104b) \quad Y = q(q) L_{n_1}(w),$$

$$(104c) \quad w = \frac{-i k_1 s^2}{q(q - i k_1)}; \quad q(q) = \frac{1}{q} \left(\frac{q}{q - i k_1} \right)^{-n_1} \cdot e^{-\frac{s^2}{q}}$$

und durch eine analoge Rechnung (vgl. Zusatz 11)

$$(104d) \quad Y_1 = \frac{s}{(q - i k_1)} q(q) L'_{n_1}(w).$$

Um die Ausführung der Differentiationen zu erleichtern, wollen wir jetzt schon annehmen $|n_1| \ll 1$ (vgl. § 11). r^2/p , s^2/q , rs/\sqrt{pq} und w werden dann nach (73), (75), (104) und (104c) von derselben Ordnung klein, nämlich um der Ordnung n_1 , und wir können schreiben

$$L_{n_1} = 1 - n_1 w = 1; \quad L'_{n_1} = -n_1.$$

Damit erhalten wir

$$\Omega_0 X Y = \frac{2\pi}{pq} \left(1 - \frac{i k_1}{q} \right)^{n_1} e^{-\frac{r^2}{p} - \frac{s^2}{q}} - \frac{2\pi i x r s}{p^2 q^2} \sin \Theta \cos \beta.$$

$$\Omega_1 X_1 Y_1 = \frac{\pi i n_1 x \sin \Theta}{p^2 q (q - i k_1)}.$$

Die in (103) verlangten Differentiationen nach k_1' und k_1 vereinfachen sich dadurch, daß $\left(\frac{\partial}{\partial k_1'} - \frac{\partial}{\partial k_1} \right) pq$ verschwindet; daraufhin erhält man mit p und q aus (104) nach Vernachlässigung von Gliedern mit x^2 :

$$(105) \quad \begin{cases} A_x = \frac{-8\pi k_1 n_1}{(k_1 - x \cos \Theta)^3} = \frac{-8\pi n_1}{k_1^2 \left(1 - \frac{1}{2} \beta \cos \Theta \right)^3}; \\ A_y \pm i A_z = \frac{8\pi n_1 x \sin \Theta}{k_1^3} = \frac{4\pi n_1 \beta \sin \Theta}{k_1^2}. \end{cases}$$

Der Nenner von A_x stimmt genau überein mit derjenigen Form¹⁾ der „Voreilung“, welche früher (Nat. Ac. a. a. O.) nach Analogie mit dem relativistischen Schema erwartet wurde.

1) Nicht nur bezüglich der dritten Potenz im Nenner, sondern auch bezüglich des Faktors $\frac{1}{2} \beta$. Es sei aber schon hier bemerkt, daß die früher gegebene Formulierung dieses Faktors für den allgemeinen Fall, nämlich $\frac{1}{2} \frac{v_1 + v_2}{c}$, sich nicht genau bestätigen wird, und daß

Aus (105) bestimmen sich die beiden zur Beobachtungsrichtung transversalen Komponenten A_θ (in der Einfallsebene) und A_z (senkrecht dazu). Ersichtlich wird

$$(105a) \quad A_\theta = -A_x \sin \Theta + A_y \cos \Theta.$$

Wir haben somit bis auf Glieder mit n_1^2 und solche mit β^2 :

$$(106) \quad A_\theta = -\frac{8\pi n_1 \sin \Theta}{k_1^2 (1 - \beta \cos \Theta)^2}, \quad A_z = 0.$$

Eine Ausrechnung¹⁾ von (100) für die kurzwellige Grenze ohne jede Vernachlässigung ergibt bis auf einen gemeinsamen belanglosen Faktor vom Absolutwert 1

$$(106a) \quad \begin{cases} A_\theta = (-1)^{-n_1} \frac{16\pi n_1}{k_1^2} \cdot \left\{ \frac{(L-L') \sin \Theta}{\left(1 - \beta \cos \Theta + \frac{\beta^2}{4}\right)^2} - \frac{L' (\cos \alpha \sin \Theta - \sin \alpha \cos \beta \cos \Theta)}{\left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right) \left(1 - \beta \cos \Theta + \frac{\beta^2}{4}\right)} \right\}; \\ A_z = (-1)^{-n_1} \frac{16\pi n_1}{k_1^2} \cdot \frac{L' \sin \alpha \cos \beta}{\left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right) \left(1 - \beta \cos \Theta + \frac{\beta^2}{4}\right)}. \end{cases}$$

$$(106b) \quad \begin{cases} L = L_{n_1} \left\{ \frac{4n_1 (a^2 - 2ab \cos \beta + b^2)}{\left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right) \left(1 - \beta \cos \Theta + \frac{\beta^2}{4}\right)} \right\}; \\ a = \left(1 - \frac{\beta}{2} \cos \Theta\right) \cos \frac{\alpha}{2}; \quad b = \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \Theta. \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich, daß für kleine n_1 bis auf Glieder mit β^2 das Depolarisationsverhältnis

$$(107) \quad D = \frac{A_\theta^2}{A_z^2} = \frac{|n_1|^2}{3} \frac{(1 - \beta \cos \Theta)^2}{\sin^2 \Theta}$$

auch bei der Berechnung des Maximums der Ausstrahlung an der kurzwelligen Grenze (Fig. 11) sich ein gewisser Unterschied gegen früher ergeben wird.

1) Ich danke Hrn. A. Maue für die sorgfältige Ausführung dieser und anderer mühsamer Rechnungen. Es wird nicht stören, daß in (106a, b) β in zweierlei Bedeutung vorkommt, als Winkel in $\cos \beta$ und als Verhältnis v_1/c .

$[A_z^2$ und A_θ^2 entsprechend Gl. (59) gebildet] mit (86) übereinstimmt, wobei zu beachten ist, daß (86) für $\Theta = \frac{\pi}{2}$ spezialisiert war.

Das Maximum der Ausstrahlung ergibt sich durch die Bedingung $\frac{d}{d\Theta} A_\theta^2 = 0$, also nach Gl. (106) aus:

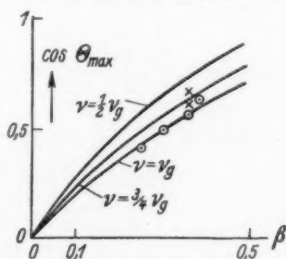
$$(108) \quad 0 = \frac{d}{d\Theta} \frac{\sin^2 \Theta}{(1 - \beta \cos \Theta)^4}, \quad (108a) \quad \cos \Theta_{\max} \sim 2\beta,$$

während es früher (a. a. O. Nat. Ac.) für die kurzwellige Grenze berechnet wurde aus:

$$(108b) \quad 0 = \frac{d}{d\Theta} A_z^2 \sin^2 \Theta = \frac{d}{d\Theta} \frac{\sin^2 \Theta}{\left(1 - \frac{\beta}{2} \cos \Theta\right)^6},$$

$$(108c) \quad \cos \Theta_{\max} \sim \frac{3}{2} \beta.$$

Die jetzige Formel (108a) zeigt also ein etwas stärkeres Ansteigen des Voreilungswinkels mit β als die frühere Formel (108c). Nimmt man in (108) die höheren Potenzen von β mit, was durch die genauere Gl. (106) kontrolliert werden kann, so erhält man die unterste Kurve in Fig. 11, die mit Beobachtungen von Kulenkampf verglichen wird.



Voreilung des Maximums als Funktion von $\beta = v/c$. Die Kurve für $\nu = \nu_0$ berechnet nach (Gl. 108), diejenigen für $\nu = \frac{3}{4} \nu_0$ und $\nu = \frac{1}{2} \nu_0$ nach Gl. (110). Beobachtungspunkte \odot und \times von Kulenkampf, und zwar gehören \odot zur Kurve $\nu = \nu_0$, \times zu den beiden unmittelbar darüberliegenden Kurven $\nu = \frac{3}{4} \nu_0$ und $\nu = \frac{1}{2} \nu_0$.

Fig. 11

§ 14. Berechnung der Voreilung im allgemeinen Fall

ψ_2^* sei nun durch (88) gegeben. Die Integration nach φ mit Hilfe von (64) läßt sich genau so ausführen wie im vorigen Paragraphen, und führt zu dem gleichen Ergebnis, nur sind jetzt r und s aus (91) zu entnehmen.

An die Stelle von (103) tritt

$$A_z = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{\partial}{\partial k_1'} - \frac{\partial}{\partial k_1} \right) \frac{1}{\Gamma(-n_2 + 1)} \int v^{-n_2} e^{-v} \Omega_0 X Y dv,$$

$$A_y \pm i A_z = \frac{1}{2} i k_1 \frac{1}{\Gamma(-n_2 + 1)} \int v^{-n_2} e^{-v} \Omega_1 X_1 Y_1 dv.$$

X, X_1, Y und Y_1 sind dieselben Integrale nach ξ und η wie in (104) mit

$$p = -\frac{i}{2} (k_1' - k_2 - x \cos \Theta), \quad q = \frac{i}{2} (k_1 + k_2 - x \cos \Theta)$$

und können aus (104a, b, c und d) entnommen werden.

Durch Übergang von r, s, w zu r_1, s_1 (vgl. (91)) und $w_1 = \frac{w}{v}$ erhalten wir dann:

$$A_x = \pi k_1 \left(\frac{\partial}{\partial k_1'} - \frac{\partial}{\partial k_1} \right) \left(\frac{q}{q - i k_1} \right)^{-n_1} \frac{A_1 + A_2}{p q},$$

$$A_y \pm i A_s = i \pi k_1 e^{\pm i \beta} \left(\frac{q}{q - i k_1} \right)^{1-n_1} \frac{A_3 + A_4}{p^2 q^2}$$

mit den Abkürzungen

$$A_1 = \frac{1}{\Gamma(-n_2+1)} \int v^{-n_2} e^{-T v} L_{n_1}(w_1 v) dv,$$

$$A_2 = \frac{-i x \sin \Theta \cos \beta}{4 \Gamma(-n_2+1)} \frac{d^2}{dr_1 ds_1} \int v^{-n_2-1} e^{-T v} L dv,$$

$$A_3 = \frac{r_1 s_1}{\Gamma(-n_2+1)} \int v^{-n_2+1} e^{-T v} L' dv,$$

$$A_4 = \Omega \frac{r_1 s_1}{\Gamma(-n_2+1)} \int v^{-n_2} e^{-T v} L' dv,$$

$$\Omega = \frac{-i x}{4} \sin \Theta \left[\left(\frac{1}{r_1 s_1} + \frac{d^2}{dr_1 ds_1} \right) \cos \beta \right. \\ \left. \mp i \left(\frac{1}{r_1} \frac{d}{ds_1} + \frac{1}{s_1} \frac{d}{dr_1} \right) \sin \beta \right].$$

Im Gegensatz zu (93) ist diesmal T gegeben durch

$$T = 1 + \frac{r_1^2}{p} + \frac{s_1^2}{q}.$$

Die Auswertung der Integrale läuft ebenso wie in den Gln. (92) bis (95), nur daß wir diesmal die Anwendung von (46a) unterlassen wollen. Wir erhalten so:

$$A_1 = T^{n_2-1} \cdot F \left(-n_1, 1-n_2, 1, \frac{w_1}{T} \right),$$

$$A_2 = \frac{i x \sin \Theta \cos \beta}{4 n_2} \frac{d^2}{dr_1 ds_1} T^{n_2} F \left(-n_1, -n_2, 1, \frac{w_1}{T} \right),$$

$$A_3 = -n_1 (1-n_2) r_1 s_1 T^{n_2-2} F \left(1-n_1, 2-n_2, 2, \frac{w_1}{T} \right),$$

$$A_4 = -n_1 (1-n_2) \Omega r_1 s_1 T^{n_2-1} F \left(1-n_1, 1-n_2, 2, \frac{w_1}{T} \right).$$

und η os Θ)

n.

)) und

Damit sind die Integrationen sämtlich ausgeführt. Wir wollen nun wie in § 13 hier schon die Annahmen des § 11 einführen, nämlich $|n_1| \ll 1$, $|n_2| \ll 1$ und nur bis zur ersten Potenz in diesen Größen rechnen. Die dabei benötigten Grenzwerte ergeben sich ebenso wie die erforderlichen Differentialformeln mühelos aus der Reihe (93b).

Zunächst die Differentiationen nach r_1 und s_1 mit Benutzung von

$$F\left(1, 1, 2, \frac{w_1}{T}\right) = -\frac{T}{w_1} \lg\left(1 - \frac{w_1}{T}\right):$$

$$A_2 = \frac{i r_1 x \sin \Theta \cos \beta}{2 p} \frac{d}{d s_1} \left[T^{n_2-1} + \frac{n_1}{T} \lg\left(1 - \frac{w_1}{T}\right) \right]$$

$$= \frac{-i r_1 s_1 x \sin \Theta \cos \beta}{p q T^2} \left[T^{n_2} + n_1 - n_2 + n_1 \lg\left(1 - \frac{w_1}{T}\right) - \frac{\frac{n_1 q}{q - i k_1}}{1 - \frac{w_1}{T}} \right]$$

und bei Vernachlässigung von x^2 :

$$A_4 = \frac{i n_1 k^2 x \sin \Theta}{2 a} \left\{ e^{\mp i \beta} + 4 k_2^2 \cos \beta \frac{k_2 - k_1 \cos \alpha}{a k k'} \sin^2 \alpha \right\}$$

mit

$$k' = k_1 + k_2, \quad k = k_1 - k_2, \quad a = k_1^2 + k_2^2 - 2 k_1 k_2 \cos \alpha.$$

Bei den noch verbleibenden Differentiationen beachte man, daß

$$\left(\frac{\partial}{\partial k_1'} - \frac{\partial}{\partial k_1} \right) p q T = 0.$$

Schließlich erhält man mit

$$b = k_1^2 - k_2^2 - 2 k_1 x \cos \Theta:$$

$$A_z = -\frac{8 \pi n_1 k_1}{a b} \cdot \left\{ k_1 - k_2 \cos \alpha + \frac{a b + (a-b)[k_2^2 \sin^2 \alpha - (k_1 - k_2 \cos \alpha)^2]}{a b} x \cos \Theta \right. \\ \left. - \frac{k_1 b + k_2 (a-b)}{a b} \cdot 2 x \sin \Theta \sin \alpha \cos \beta \right\},$$

$$A_y \pm i A_z = \frac{8 \pi n_1 k_1}{a b} \cdot \left\{ x \sin \Theta + k_2 \sin \alpha e^{\pm i \beta} \left[1 - \frac{2(a-b)(k_1 - k_2 \cos \alpha)}{a b} x \cos \Theta \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2 k_2 (a-b)}{a b} x \sin \Theta \sin \alpha \cos \beta \right] \right\}$$

und somit für A_θ (vgl. (105a)) und A_z mit

$$d = \frac{2x}{a} [k_1 \cos \Theta - k_2 (\cos \alpha \cos \Theta + \sin \alpha \cos \beta \sin \Theta)];$$

$$A_\theta = \frac{8\pi k_1 n_1}{a b} \left\{ k_1 (1 + d) \sin \Theta \right. \\ \left. - k_2 \left[1 + \left(1 - \frac{a}{b} \right) d \right] (\cos \alpha \sin \Theta - \sin \alpha \cos \beta \cos \Theta) \right\},$$

$$A_z = \frac{8\pi k_1 k_2 n_1}{a b} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{a}{b} \right) d \right\} \sin \alpha \sin \beta.$$

Um ein Maß für die unter dem Winkel Θ zur Einfallsrichtung zu beobachtende Intensität zu erhalten, hat man analog zu (59) zu bilden

$$\mathbf{A}^2 = \frac{1}{4\pi} \int (|A_\theta|^2 + |A_z|^2) \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta.$$

Die Integration nach β ist unschwer auszuführen. Für die Integration nach α empfiehlt es sich, $\cos \alpha$ durch $\frac{k_1^2 + k_2^2 - a}{2 k_1 k_2}$ zu ersetzen. Man hat dann folgende Integrale auszuführen:

$$\int a d \cos \alpha = 2 (k_1^2 + k_2^2); \quad \int d \cos \alpha = 2; \quad \int \frac{d \cos \alpha}{a} = \frac{1}{k_1 k_2} \lg \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2};$$

$$\int \frac{d \cos \alpha}{a^2} = \frac{2}{(k_1^2 - k_2^2)^2}; \quad \int \frac{d \cos \alpha}{a^3} = \frac{2 (k_1^2 + k_2^2)}{(k_1^2 - k_2^2)^4}$$

und erhält

$$\mathbf{A}^2 = \frac{2^4 \pi^2 |n_1|^2}{b^3} \left\{ \left[\left(\frac{k_1^2 - k_2^2}{2 k_1 k_2} + \frac{k_1^2 - 3 k_2^2}{2 k_1 k_2} \frac{2 k_1 x \cos \Theta}{k_1^2 - k_2^2} \right) \cdot \lg \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \right. \right. \\ \left. \left. + 1 + \frac{6 k_1 x \cos \Theta}{k_1^2 - k_2^2} \right] 2 \sin^2 \Theta \right. \\ \left. + \left[\frac{k_1^2 + k_2^2}{2 k_1 k_2} \lg \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} - 1 \right] (1 + \cos^2 \Theta) \right\}.$$

Dabei rührt nur der von Θ unabhängige Bestandteil der $\{\}$ von A_z her. Da x in den übrigen Gliedern wie auch in b nur mit dem Faktor $\cos \Theta$ auftritt, ergibt sich bei Beobachtung unter 90° für die Polarisation der gleiche Wert wie ohne Retardierung.

Berücksichtigen wir schließlich, daß

$$\frac{2 k_1 x}{k_1^2 - k_2^2} = \frac{v_1}{c} = \beta$$

ist, und fassen wir unter Vernachlässigung von β^2 etwas anders zusammen, so erhalten wir

$$(109) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{4}{(k_1^2 - k_2^2)^2} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{M}_x^2 \frac{\sin^2 \Theta}{(1 - \beta \cos \Theta)^4} \\ &+ \mathbf{M}_z^2 \left(1 + \frac{\cos^2 \Theta}{(1 - \beta \cos \Theta)^4} \right) = \frac{\mathbf{M}_\Theta^2}{(1 - \beta \cos \Theta)^4} + \mathbf{M}_z^2. \end{aligned} \right.$$

\mathbf{M}_Θ^2 ist dabei durch (99c), \mathbf{M}_x^2 und \mathbf{M}_z^2 durch (98) und (98a) gegeben. Der Faktor $(k_1^2 - k_2^2)^2$ ist proportional dem Quadrat der Frequenz, das ja auch klassisch beim Übergang vom elektrischen Moment zum Vektorpotential auftreten muß.

In Analogie zu (108) gilt für den Winkel Θ_{\max} , unter dem die größte Intensität zu beobachten ist:

$$(110) \quad \frac{d}{d\Theta} \mathbf{A}^2 = 0;$$

$$(110a) \quad \cos \Theta_{\max} = \frac{2\beta}{1 - \frac{\mathbf{M}_z^2}{\mathbf{M}_x^2}} = \frac{2\beta}{1 - D}.$$

Da D , Gl. (99), nach der Tabelle von S. 299 bei Entfernung von der kurzwelligen Grenze monoton wächst, ergibt sich hier das bereits in der früheren Note (Nat. Ac.) betonte paradoxe Resultat, daß die kleineren Frequenzen des Spektrums eine größere Voreilung aufweisen als die größeren, ein Resultat, das mit den Ergebnissen von Kulenkampff, a. a. O. (Figg. 9 und 13) im Einklang ist.

In Fig. 11 ist die Bestimmung von Θ_{\max} dargestellt, wie sie sich aus (110) ergibt, wenn man höhere Potenzen von β beibehält. Die hierin liegende Inkonsequenz läßt sich vielleicht dadurch rechtfertigen, daß für den Grenzfall $v \rightarrow v_g$ die aus (110) berechnete Kurve mit der aus der genaueren Formel (106a) berechneten merklich übereinstimmt. Natürlich können durch die hier durchwegs vernachlässigte Relativitätskorrektur die höheren Glieder in β modifiziert werden.

Um die Richtung maximaler Härte zu ermitteln, erinnern wir uns, daß nach Fig. 7 der von \mathbf{M}_x^2 herrührende Teil der Ausstrahlung härter ist als der Anteil von \mathbf{M}_z^2 (der Schwerpunkt der schraffierten Fläche liegt weiter rechts als der der unschraffierten). Die Richtung größter Härte muß also dadurch ausgezeichnet sein, daß für sie der Koeffizient von \mathbf{M}_x^2

in (109) am stärksten über den von M_z^2 überwiegt. Wir verlangen demnach:

$$\frac{d}{d\Theta} \frac{\sin^2 \Theta}{(1 - \beta \cos \Theta)^4} : \left(1 + \frac{\cos^2 \Theta}{(1 - \beta \cos \Theta)^4} \right) = 0; \quad \cos \Theta = \beta.$$

Die Härte zeigt also halb so große Voreilung wie die Intensität an der kurzwelligen Grenze.

Anhang. Noten (1–11)

1. Eine heuristische Ableitung der Gl. (6) ist für den akustischen Fall in den S. 258 zitierten Abhandlungen enthalten. Wir beschränken uns hier auf eine Verifikation der Gleichung, setzen uns dabei aber über Konvergenzschwierigkeiten hinweg. Zuvor schreiben wir die Differentialgleichung (1), die nur für $P \neq Q$ gilt, in die allgemeingültige Form um:

$$(A) \quad \Delta \psi + k^2 \psi = f.$$

f soll für alle Punkte $P \neq Q$ verschwinden und nur für die Umgebung von Q sehr große Werte annehmen, derart daß

$$(B) \quad \int f d\tau = 1$$

wird, das Integral über die (nähere oder fernere) Umgebung von Q erstreckt. Die hier eingeführte Funktion f wurde a. a. O. als „Zackenfunktion“ bezeichnet; sie ist identisch mit der von Dirac gebrauchten δ -Funktion. Wenn man f nach den Eigenfunktionen ψ_r entwickelt (die Möglichkeit dieser Entwicklung wird für alle stetigen Funktionen vorausgesetzt; f kann als stetige, wenn auch sehr steile Zacke behandelt werden), erhält man:

$$f = \sum A_r \psi_r(P).$$

A_r berechnet sich in Fourierscher Weise:

$$A_r = \int f \psi_r^* d\tau.$$

Wegen der Bedeutung von f und wegen Gl. (B) folgt aber

$$A_r = \psi_r^*(Q) \int f d\tau = \psi_r^*(Q), \quad f = \sum \psi_r^*(Q) \psi_r(P).$$

Gl. (A) lautet also:

$$(C) \quad \Delta \psi + k^2 \psi = \sum \psi_r^*(Q) \psi_r(P).$$

Andererseits berechnet man aus unserer Darstellung (6):

$$(D) \quad \Delta \psi + k^2 \psi = \sum_r \frac{\psi_r^*(Q) (\Delta \psi_r(P) + k^2 \psi_r(P))}{k^2 - k_r^2}$$

und dies ist nach (3) identisch mit Gl. (C). Unsere Darstellung (6) genügt also zunächst der vorgelegten Differentialgleichung. Daß sie auch der Grenzbedingung, z. B. $\psi = 0$ auf der Oberfläche von G genügt, folgt daraus, daß alle ψ_r nach Voraussetzung derselben Grenzbedingung genügen.

Um das Verhalten von ψ in der Umgebung von Q festzustellen, integriere man (A) über das Innere einer um Q beschriebenen Kugel von dem beliebigen kleinen Radius $r = PQ$. Rechterhand entsteht Eins nach (B):

$$\int \Delta \psi d\tau + k^2 \int \psi d\tau = 1.$$

Das zweite Integral links ist von niederer Ordnung als das erste und verschwindet für $r = 0$; das erste ergibt nach dem Gaußschen Satz:

$$\int \Delta \psi d\tau = \int \frac{\partial \psi}{\partial r} d\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot 4\pi r^2.$$

Also

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2}, \quad \psi = -\frac{1}{4\pi r},$$

wofür wir mit gleichem Recht auch schreiben können:

$$(E) \quad \psi = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}.$$

(E) definiert diejenige Erregungsstärke, die wir in Gl. (14) des Textes als „Einheitsquelle“ bezeichnet haben. Der in dieser Definition enthaltene Faktor 4π entspricht der Einführung „rationeller Einheiten“ in der Elektrodynamik.

Im vorstehenden haben wir nur vom akustischen Falle gesprochen. Es ist aber klar, daß im Ein-Elektronenfall alles ebenso läuft, wenn man nur k^2 durch $K^2 = k^2 + \dots$, vgl. (2), ersetzt und (5) berücksichtigt.

2. Die Ausstrahlungsbedingung lautet: Es soll für $r \rightarrow \infty$ nicht nur $r\psi$ endlich bleiben, sondern auch

$$(A) \quad r \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - i k \psi \right)$$

verschwinden. Erst durch diese Bedingung wird die Eindeutigkeit der Lösung gesichert. Anderenfalls wäre es möglich, Eigenfunktionen, d. h. überall endliche Lösungen der Wellengleichung über die gesuchte erzwungene Schwingung zu überlagern. Solche Eigenfunktionen sind im akustischen Fall, vgl. (7), von der Form $\sin kr/r$, wo r den Abstand von einem beliebigen Raumpunkte bedeuten möge. Man beachte, daß solche Eigenfunktionen nicht der Ausstrahlungsbedingung genügen, daß ihr aber die in (7) ebenfalls genannte Funktion e^{ikr}/r genügt; für diese wird nämlich der Ausdruck (A) gleich $-\frac{e^{ikr}}{r}$ also in der Tat gleich Null für $r = \infty$.

Der Eindeutigkeitsbeweis für die erzwungene Schwingung ist identisch mit dem Nicht-Existenzbeweis für eine Eigenfunktion, von der vorausgesetzt wird, daß sie der Ausstrahlungsbedingung genüge; er läßt sich wie bekannt auf Grund des Greenschen Satzes führen:

$$(B) \quad \int (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma.$$

Das Integral links wird über das Innere, das Integral rechts über die Oberfläche einer Kugel vom Radius $r \rightarrow \infty$ erstreckt. u sei die fragliche Eigenfunktion, deren Nichtexistenz bewiesen werden soll, v die erzwungene Schwingung, d. h. die Greensche Funktion des unendlichen Gebietes mit dem Quellpunkt Q , deren Existenz angenommen wird. Als Differentialgleichung von v ist Gl. (A 1) zu benutzen. Die linke Seite wird dann

$$u_Q \int f d\tau = u_Q.$$

Die rechte Seite ist gleich

$$\int \left(u \frac{v'}{r} - v \frac{u'}{r} \right) d\sigma,$$

wo u' , v' die nach (A 2) verschwindenden Werte von $r \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - i k \psi \right)$ für $\psi = u$ bzw. v bedeuten. Schreiben wir noch $d\sigma = r^2 d\omega$, so geht die rechte Seite von (B 2) über in

$$\int (r u v' - r v u') d\omega$$

und verschwindet für $r \rightarrow \infty$, weil u' und v' verschwinden, ru sowie rv endlich bleiben und weil die Integration nunmehr über ein endliches Gebiet (4π) erstreckt wird.

Wir haben also nach (B 2) in der Tat $u_Q = 0$, d. h. durchweg $u = 0$, da Q einen beliebigen Raumpunkt bedeutet.

Der vorstehende Beweis gilt im Elektronenfall ebenso wie im akustischen Falle.

Statt der Ausstrahlungsbedingung (A) können wir auch eine Einstrahlungsbedingung formulieren:

$$(C) \quad r \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} + i k \psi \right) = 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty,$$

welcher z. B. die Funktion $v = \frac{e^{-ikr}}{r}$ genügt. Aus (B) folgt dann genau wie früher, daß es keine Eigenfunktion, d. h. keine singularitätenfreie Lösung der akustischen oder Wellengleichung gibt, die der Einstrahlungsbedingung (C) genügt.

Diese Feststellung ist wichtig für Gl. (12), wo die Eigenfunktion χ in zwei Teilfunktionen χ^1 und χ^2 zerspalten wird, derart, daß diese der Aus- bzw. Einstrahlungsbedingung genügen. Wir schließen aus dem vorstehenden, daß diese Teilfunktionen keine Eigenfunktionen sein können, sondern Singularitäten haben müssen und daß sie durch die Aus- bzw. Einstrahlungsbedingung eindeutig (bis auf eine multiplikative Konstante) festgelegt sind.

3. Wir machen zunächst eine Dimensionsbetrachtung: Die diskreten Eigenfunktionen in Gl. (6) haben vermöge ihrer Normierung, vgl. Gl. (21) S. 264, die Dimension $l^{-3/2}$ (l = Länge); da k und k_r von der Dimension l^{-1} sind, liefert Gl. (6) für ψ die Dimension l^{-1} . Dies entspricht der Definition der „Einheitsquelle“ in (E 1). Andererseits haben die kontinuierlichen Eigenfunktionen nach ihrer Normierung in Gl. (22) die Dimension l^{-1} ,

die auch dem kontinuierlichen Eigenwert q zukommt. Damit also die linke Seite von (11) wieder die der Einheitsquelle entsprechende Dimension l^{-1} bekommt, muß im Zähler von (11) eine Größe der Dimension l^{-1} hinzutreten, die eben durch unser dq repräsentiert wird. Daß in Gl. (34) und folgenden, Jahresber., a. a. O., statt dq geschrieben wurde $q^3 dq$, erklärt sich daraus, daß dort die Normierungsbedingung (22) nicht gehörig berücksichtigt wurde.

Zum quantitativen Beweise schreiben wir die Formel (11) in der Form der Gl. (6), indem wir nur die Abhängigkeit von q zum Ausdruck bringen:

$$(A) \quad \psi = \int \frac{dq}{k^2 - q^2} \psi_q^*(Q) \psi_q(P)$$

und verifizieren, daß sie der Differentialgleichung (A 1), $\Delta\psi + k^2\psi = f$ genügt.

Ausführung der Differentiationen liefert wie in (D 1)

$$(B) \quad \int d\tau \psi_q^*(Q) \psi_q(P) = f.$$

Dies vergleichen wir mit dem allgemeinen Ansatz (Entwicklung von f nach den Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums, $d\sigma$ ist eine neue Bezeichnung für $d\varrho$):

$$(C) \quad f = \int d\sigma A_\sigma \psi_\sigma.$$

Um hierin A zu berechnen, multiplizieren wir links und rechts mit ψ_q^* und integrieren über den unendlichen Raum (Element $d\tau$):

$$(D) \quad \int f \psi_q^* d\tau = \int d\tau \psi_q^* \int d\sigma A_\sigma \psi_\sigma.$$

Die linke Seite ist wegen (B 1) gleich $\psi_q^*(Q)$. Die rechte Seite wird wegen der Orthogonalitätsbedingung

$$\int \psi_\sigma \psi_q^* d\tau = 0 \dots \sigma \neq q,$$

gleich

$$A_q \int d\tau \psi_q^* \int_{q_1}^{q_2} \psi_\sigma d\sigma, \text{ wo } q_1 < q < q_2.$$

Dies ist aber identisch mit A_q , da die von uns festgesetzte Normierung im kontinuierlichen Spektrum, vgl. Gl. (22), gerade verlangt, daß das neben A_q auftretende Doppelintegral gleich Eins wird. Aus (D) folgt also $\psi_q^*(Q) = A_q$, so daß (C) mit (B) identisch wird. Unsere Ausgangsformel (A) ist hiermit verifiziert.

Im Ein-Elektronenfall haben wir in den Formeln (A) bis (C) dem Integral über das kontinuierliche die Summe über das diskontinuierliche Spektrum hinzuzufügen. Diese fällt aber in (D) heraus und läßt daher den Schluß $A_q = \psi_q^*(Q)$ ungeändert.

4. Wendet man das Ausstrahlungskriterium (A 2) auf (11) oder (11a) an, so erhält man unter dem Integralzeichen nach q den Ausdruck:

$$(A) \quad r \left(\frac{\partial \chi_l(qr)}{\partial r} - i k \chi_l(qr) \right) = \frac{1}{2} (I + II).$$

Die hier angedeuteten Ausdrücke I und II entstehen, wenn man χ nach (12) in die beiden Teilfunktionen χ^1 und χ^2 zerlegt. Man führt das Integral über II in die negative, das über I in die positive Halbebene der Fig. 1 über (vgl. § 3). Im Unendlichen beider Halbebenen verschwinden I bzw. II. Das Residuum von I im singulären Punkte $q = k$ verschwindet ebenfalls, da I für $q = k$ mit der linken Seite der Ausstrahlungsbedingung identisch wird und da χ^1 nach Definition dieser Bedingung genügt (χ^2 genügt der Einstrahlungsbedingung (C 2)). Es bleiben noch die Wege über die beiden imaginären Halbachsen der Fig. 1; aber auch diese kompensieren sich, wie aus der folgenden Note zu ersehen ist.

Hätte man statt des Integrationsweges der Fig. 1 den spiegelbildlichen, d. h. in der positiven Halbebene verlaufenden gewählt, so würde die dadurch definierte Funktion ψ der Einstrahlungsbedingung (C 2) genügen, weil dann das Residuum von II für $q = k$ an die Stelle des Residuums von I tritt.

5. χ^1 und χ^2 sind durch Differentialgleichung und Grenzbedingung [Aus- bzw. Einstrahlungsbedingung (A 2)] definiert, und zwar (vgl. Schluß von Note 2) eindeutig bis auf eine multiplikative Konstante, d. h. einen von den Koordinaten unabhängigen Faktor. Vertauscht man $+k$ mit $-k$, so ändert sich die Differentialgleichung nicht, während (A 2) in (C 2) übergeht und umgekehrt. Es muß daher sein:

$$(A) \quad \chi^1(-k) = C \chi^2(+k), \quad \chi^2(-k) = D \chi^1(+k).$$

C und D können dabei von k abhängen, so daß wir besser $C(k)$, $D(k)$ schreiben wollen. Auch die stetige Lösung χ der Differentialgleichung ist eindeutig bis auf eine multiplikative Konstante definiert. Es gilt also auch

$$(B) \quad \chi(-k) = E(k) \chi(+k).$$

Ersetzt man hier χ durch $\frac{1}{2}(\chi^1 + \chi^2)$, so schließt man unmittelbar aus (A):

$$(C) \quad C(k) = D(k) = E(k).$$

Nun folgt durch Multiplikation von (A) und (B) mit Rücksicht auf (C)

$$(D) \quad \chi^2(-k) \chi(-k) = E^2(k) \chi^1(+k) \chi(+k).$$

Im akustischen Falle ist aber $E^2 = 1$, da nach (9) und (27) gilt:

$$\chi(-k) = (-1)^{l+1} \chi(k).$$

Wir benutzen (D) für imaginäre k , setzen also $k = i\varrho$, $-k = -i\varrho$ und schließen daraus, daß sich die beiden Integrale längs der imaginären Halbachsen in Fig. 1 gegenseitig zerstören, was zu beweisen war.

6. Im Ein-Elektronenfall gelten die Überlegungen der vorangehenden Note nicht mehr in so einfacher Form. Insbesondere heben sich die beiden Integrale längs der imaginären Halbachsen jetzt nicht auf. Ihre radialen Bestandteile sind nach (11a) und (12)

$$\frac{1}{2} \int_0^{i\infty} \frac{d\varrho}{k^2 - \varrho^2} \chi_l^1(\varrho, r_0) \chi_l(\varrho, r)$$

bzw.

$$\frac{1}{2} \int_0^{-i\infty} \frac{d\varrho}{k^2 - \varrho^2} \chi_l^2(\varrho, r_0) \chi_l(\varrho, r).$$

Beide verschwinden aber für $Q \rightarrow \infty$ ($r_0 \rightarrow \infty$), da nach Definition von χ^1 und χ^2 gilt:

$$\chi_l^1(+i\infty) = 0 \quad \text{und} \quad \chi_l^2(-i\infty) = 0.$$

7. Bei der Bestimmung der χ_l in (32) ist zu beachten, daß χ_l^1 in (13) wegen $r_0 > r$ dem Radialteil von $\psi(Q)$ entstammt, das in (6) mit dem Zeichen des konjugiert Komplexen auftritt. χ_l^1 meint also denjenigen Bestandteil von χ_l^* , bei dem ikr im Exponenten mit dem positiven Zeichen vorkommt. (Daß wir im akustischen Falle zwischen χ_l und χ_l^* nicht zu unterscheiden brauchten, hatte seinen Grund in Gl. (9), $\chi_l = \chi_l^*$, welche hier nicht mehr zutrifft.) Demnach haben wir im Elektronenfall für große r zunächst nach (29) und (30)

$$2\chi_l^* = \frac{1}{kr} e^{i(kr + \alpha - \pi \frac{l+1}{2})} + \frac{C_2}{r} e^{-i(kr + \alpha)}.$$

Von hier aus erhalten wir durch Bildung des konjugiert Komplexen die asymptotische Entwicklung von χ_l :

$$(A) \quad 2\chi_l = \frac{1}{kr} e^{-i(kr + \alpha - \pi \frac{l+1}{2})} + \frac{C_2^*}{r} e^{i(kr + \alpha)}.$$

Durch diese Forderung, zusammen mit Differentialgleichung und Stetigkeitsbedingung, ist das in (32) vorkommende χ_l , insbesondere also auch die Größe von C_2 , eindeutig bestimmt.

8. *Asymptotische Darstellung von $L(u, n)$ für den Fall, daß u und n gleichzeitig unendlich werden.*

Ausgehend von Gl. (45) schreiben wir:

$$(A) \quad 2\pi i A = \int e^{f(y)} \varphi(y) dy \left\{ \begin{array}{l} f(y) = -uy + n \log \frac{y + \frac{1}{2}}{y - \frac{1}{2}} \\ \varphi(y) = (y - \frac{1}{2})^{-1} \end{array} \right.$$

Wir hatten in § 9 den Fall zu betrachten

$$(B) \quad n = \frac{Z}{ika} \rightarrow -i\infty, \quad u = 4n \cos^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow -i\infty.$$

Hier verschwindet der Integrand in der *positiv-imaginären y -Ebene* und wird in der *negativ-imaginären Halbebene* sehr groß. Man sieht dies, wenn man etwa Bipolarkoordinaten einführt:

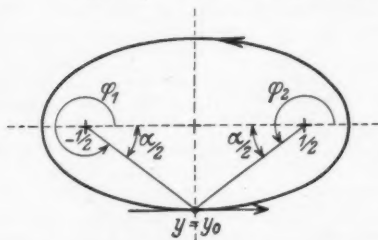
$$y + \frac{1}{2} = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad y - \frac{1}{2} = r_2 e^{i\varphi_2},$$

in denen sich ergibt:

$$\text{Reeller Teil} \left(n \log \frac{y + \frac{1}{2}}{y - \frac{1}{2}} \right) = |n| (\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 < 0 \text{ in der pos.-im. } y\text{-Ebene,}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 > 0 \text{ in der neg.-im. } y\text{-Ebene.}$$



Integrationsweg zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von L und L' nach der Sattelpunktmethode.

Der in der y -Ebene geschlossene Weg wird durch seine Tangente im Sattelpunkt ersetzt

Fig. 12

Infolgedessen kommt es nur auf den Integrationsweg in der negativ-imaginären Halbebene an. Dieser ist über einen *Sattelpunkt* zu führen. Es gibt nur *einen* solchen Punkt $y = y_0$ in der *negativ-imaginären* Halbebene. Aus $f'(y) = 0$ findet man

$$(C) \quad -u - \frac{n}{y^2 - \frac{1}{4}} = 0, \quad y_0 = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{n}{u}} = -\frac{i}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

vgl. (B). Somit (vgl. auch Fig. 12):

$$f(y_0) = + \frac{i u}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + |n| (\varphi_1 - \varphi_2) = |n| (\sin \alpha - \alpha + \pi),$$

$$\varphi(y_0) = -2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{i \alpha}{2}},$$

$$f''(y_0) = \frac{2 n y_0}{\left(y_0^2 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = -8 |n| \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Setzt man

$$f''(y_0) = -2 \alpha^2,$$

so wird

$$\alpha = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{|n| \sin \alpha}$$

und die Entwicklung im Sattelpunkte lautet:

$$(D) \quad f(y) = f(y_0) + \frac{1}{2} f''(y_0) (y - y_0)^2 = f(y_0) - \alpha^2 (y - y_0)^2.$$

Somit, wenn man in üblicher Weise den Weg durch den Sattelpunkt beiderseits ausdehnt, $-\infty < y - y_0 < +\infty$

$$\begin{aligned} 2\pi i A &= \varphi(y_0) e^{f(y_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 (y - y_0)^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \varphi(y_0) e^{f(y_0)} \\ &= \frac{-\sqrt{\pi} e^{-\frac{i\alpha}{2}}}{\sqrt{|n| \sin \alpha}} e^{i|n|(\sin \alpha - \alpha + \pi)}. \end{aligned}$$

Für $L = e^{u/2} A$ folgt daraus:

$$(E) \quad L = \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi |n| \sin \alpha}} e^{-i \left(2|n| \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \right)} e^{i|n|(\sin \alpha - \alpha + \pi)}.$$

Stellt man andererseits L' durch das zu (A) analoge Integral dar, so erhält man

$$(F) \quad \begin{cases} -2\pi i L' = e^{u/2} \int e^{f(y)} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{u/2} e^{f(y_0)}, \\ L' = \frac{i}{4} \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{\pi |n| \sin \alpha}} e^{-i 2|n| \cos^2 \frac{\alpha}{2}} e^{i|n|(\sin \alpha - \alpha + \pi)}. \end{cases}$$

Indessen verlieren die Gl. (E) und (F) ihre Gültigkeit für die Umgebung von $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$, was äußerlich schon dadurch angezeigt wird, daß dann die Faktoren $\sqrt{\sin \alpha}$ und $\cos \alpha/2$ im Nenner verschwinden. Der Grund hierfür liegt darin, daß dann in der Entwicklung (D) das Glied zweiter Ordnung klein und das bisher vernachlässigte Glied dritter Ordnung maßgebend wird. Während aber die Stelle $\alpha = 0$ stark betont ist, weil hier der Exponent $|n|(\sin \alpha - \alpha + \pi)$ sein Maximum $|n|\pi$ hat, kommt es auf die Stelle $\alpha = \pi$ nicht an, weil dort derselbe Exponent Null wird. Wir beschäftigen uns daher nur mit der Umgebung von $\alpha = 0$. Statt (D) schreiben wir

$$\begin{aligned} f(y) &= f(y_0) - \alpha^2 (y - y_0)^2 - i b (y - y_0)^3 \\ -i b &= \frac{1}{6} f'''(y_0) = \frac{n}{3} \left(y_0^2 - \frac{1}{4} \right)^{-2} \left(1 - \frac{4 y_0^2}{y_0^2 - \frac{1}{4}} \right) \end{aligned}$$

$$b = \frac{16}{3} |n| \cos^4 \frac{\alpha}{2} \left(1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{16}{3} |n| \quad \text{für } \alpha = 0.$$

Somit, wenn man auch $\varphi(y)$ entwickelt:

$$(H) \quad 2\pi i A = \varphi(y_0) e^{f(y_0)} \left\{ K_1 + \frac{\varphi'(y_0)}{\varphi(y_0)} K_2 \right\},$$

$$(I) \quad \begin{cases} K_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(y-y_0)^2 - i b(y-y_0)^3} dy, \\ K_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(y-y_0)^2 - i b(y-y_0)^3} (y-y_0) dy. \end{cases}$$

Wegen

$$\varphi(y_0) = -2e^{-\frac{i a}{2}}, \quad \frac{\varphi'(y_0)}{\varphi(y_0)} = +2e^{-\frac{i a}{2}},$$

wobei $\cos \frac{\alpha}{2} = 1$ gesetzt werden konnte, folgt aus (H)

$$(K) \quad \begin{cases} L = e^{u/2} A = \frac{i}{\pi} e^{f(y_0) + \frac{u}{2} - \frac{i a}{2}} \left\{ K_1 + 2e^{-\frac{i a}{2}} K_2 \right\} \\ \text{und analog zu (F)} \\ L' = \frac{i}{2\pi} e^{f(y_0) + \frac{u}{2}} K_1. \end{cases}$$

K_1 und K_2 hängen mit den Bessel'schen Funktionen vom Index $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ zusammen.¹⁾ Man kann, um dies zu zeigen, den Exponenten

$$Y = -a^2(y-y_0)^2 - i b(y-y_0)^3$$

durch die Substitution

$$y - y_0 = c \cos \varphi + d$$

auf die Form bringen

$$Y = i s (4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi) + r = i s \cos 3 \varphi + r.$$

Man hat dazu die vier disponiblen Größen c, d, s, r folgendermaßen zu wählen:

$$(L) \quad c = \frac{2}{3} i \frac{a^2}{b} = 2d, \quad s = \frac{2}{27} i \frac{a^3}{b^3} = ir$$

und erhält

$$K_1 = -c e^r \int e^{i s \cos 3 \varphi} \sin \varphi d \varphi,$$

$$\begin{aligned} K_2 &= -c^3 e^r \int e^{i s \cos 3 \varphi} \left(\cos \varphi + \frac{d}{c} \right) \sin \varphi d \varphi \\ &= -\frac{c^3}{2} e^r \int e^{i s \cos 3 \varphi} \sin 2 \varphi d \varphi + \frac{c}{2} K_1. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt noch $3 \varphi = \omega$, so wird

$$K_1 = -\frac{c}{6i} e^r \int e^{i s \cos \omega} \left(e^{\frac{i \omega}{3}} - e^{-\frac{i \omega}{3}} \right) d \omega,$$

$$K_2 - \frac{c}{2} K_1 = -\frac{c^3}{12i} e^r \int e^{i s \cos \omega} \left(e^{\frac{2i \omega}{3}} - e^{-\frac{2i \omega}{3}} \right) d \omega.$$

1) Vgl. J. A. Gaunt, Ztschr. f. Phys. 59. S. 511. 1930.

Die rechtsstehenden Integrale sind nun in der Tat Besselsche Funktionen¹⁾ vom Index $\pm \frac{1}{2}$ bzw. $\pm \frac{3}{2}$. Zu ihrer Spezifizierung müßten wir den Integrationsweg genauer definieren, was mühsam wäre. Jedenfalls aber können wir schreiben, unter H^1 und H^2 die „erste“ und „zweite“ Hankelsche Funktion²⁾ verstanden:

$$(M) \quad \begin{cases} \frac{K_1 e^{-r}}{c} = A H_{1/2}^1(s) + B H_{1/2}^2(s), \\ \frac{K_2 - \frac{c}{2} K_1}{c^2} e^{-r} = C H_{3/2}^1(s) + D H_{3/2}^2(s) \end{cases}$$

und können die A, B, C, D durch asymptotische Entwicklung finden.

Wir gehen so vor, daß wir $b \rightarrow 0$ gehen lassen bei festem a ; dann folgt aus (I) unmittelbar:

$$(N) \quad K_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{a}, \quad K_2 = 0 \quad \text{und um so mehr} \quad \frac{K_2}{c} = 0.$$

Mit $b \rightarrow 0$ geht $is \rightarrow -\infty$, $-is \rightarrow +\infty$. Allgemein gilt bei unserer Bedeutung von s :

$$H_r^1(s) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cdot e^{i(s - \frac{\pi}{2}(r + \frac{1}{2}))} \rightarrow 0,$$

$$H_r^2(s) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \cdot e^{-i(s - \frac{\pi}{2}(r + \frac{1}{2}))} \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt zunächst, daß in (M) sein muß

$$B = D = 0.$$

Berücksichtigt man überdies die Bedeutung von r und c , sowie die Grenzwerte (N), so berechnet man leicht

$$A = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} e^{\frac{i\pi}{6}}, \quad C = -\frac{\pi}{4\sqrt{3}} e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

also nach (M)

$$(N) \quad \begin{cases} K_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} c e^{-is} e^{\frac{i\pi}{6}} H_{1/2}^1, \\ K_2 - \frac{c}{2} K_1 = \frac{-\pi}{4\sqrt{3}} c^2 e^{-is} e^{\frac{i\pi}{3}} H_{3/2}^1. \end{cases}$$

Aus (O), (L) und (K) folgt jetzt bei kleinem α

$$(O) \quad \begin{cases} |L'| = \frac{\alpha}{8\sqrt{3}} e^{|n|\pi} |H_{1/2}(s)|, \quad s = \frac{i}{6} |n| \alpha^2, \\ \left| L - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} L' \right| = \frac{\alpha^2}{8\sqrt{3}} e^{|n|\pi} |H_{1/2}(s)|. \end{cases}$$

1) Vgl. etwa Jahnke-Emde, Funktionentafeln S. 169.

Vorstehendes stimmt mit J. A. Gaunt a. a. O. überein, der auf den Zusammenhang dieser Formeln mit der Kramersschen Theorie des kontinuierlichen Röntgenspektrums hinweist.

9. Ein Wärmepol in der xy -Ebene an der Stelle $x' y'$ erzeugt zur Zeit $t > 0$ die Temperaturverteilung (Leitfähigkeit = 1 gesetzt):

$$v = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{R^2}{4t}}, \quad R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi').$$

In der Fourierreentwicklung von v wird der Faktor von $\cos n(\varphi - \varphi')$

$$(A) \quad v_n = \frac{i^n \gamma_n}{2t} e^{-\frac{r^2 + r'^2}{4t}} I_n\left(\frac{-ir r'}{2t}\right), \quad \gamma_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \dots n = 0, \\ \frac{1}{\pi} \dots n > 0. \end{cases}$$

Dasselbe Problem nach der Fourierschen Methode mit der in Note 1 definierten Zackenfunktion f angesetzt liefert nach Transformation in Polarkoordinaten:

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2 t} I_0(uR).$$

Der Faktor v_n lautet nach dem Additionstheorem von I_0

$$(B) \quad v_n = \gamma_n \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2 t} I_n(ur) I_n(ur').$$

Aus (A) und (B) folgt

$$(C) \quad \int_0^\infty u \, du \, e^{-u^2 t} I_n(ur) I_n(ur') = \frac{i^n}{2t} e^{-\frac{r^2 + r'^2}{4t}} I_n\left(\frac{-ir r'}{2t}\right).$$

Die Umformung (74) \rightarrow (74a) ist ein Spezialfall dieser Formel für $n=0$, $r'=0$; allgemeiner wird sie in Gl. (77) verwendet werden.

10. Orthogonalität und Normierung.

Die Parameter k, α, β ($0 \leq k \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$), durch die wir die einzelnen Funktionen ψ_1, ψ_2 der ein- und auslaufenden Wellen unterschieden, sind im wesentlichen (wegen $k = \frac{2\pi}{h} m v$) *Polarkoordinaten des Impulses* in großer Entfernung vom Kern, und zwar gerechnet für die Einfallsrichtung des betreffenden Elektrons. Insbesondere setzten wir für das erste bzw. zweite Elektron:

$$k = k_1, \quad \alpha = 0, \quad \beta \text{ unbestimmt.}$$

$$k = k_2, \quad \alpha = \alpha, \quad \beta = \beta.$$

Wir fassen diese Impulskoordinaten unter dem Buchstaben P_1 bzw. P_2 , die Raumkoordinaten ξ, η, φ unter dem Buchstaben X zu-

sammen. Dann lautet die bekannte Orthogonalitäts- und Normierungsbedingung:

$$(A) \quad \int_{\tau} d\tau N(P_1) \psi(P_1, X) \int_{\Delta P_2} dP_2 N(P_2) \psi^*(P_2, X) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem P_1 in ΔP_2 gelegen ist oder nicht. ΔP_2 bedeutet dabei irgendeinen Bereich des Impulsraumes in der Umgebung von P_2 ; $N(P_1)$ und $N(P_2)$ sind die Normierungsfaktoren für $\psi_1 = \psi(P_1, X)$ und $\psi_2 = \psi(P_2, X)$.

Wir beweisen zunächst die *Orthogonalität*. Um die Integrationsfolge vertauschen zu können, fügen wir in dem Integral $d\tau$ einen Konvergenzfaktor

$$e^{-2t\tau} = e^{-t(\xi + \eta)}$$

hinzu, mit der Verabredung, daß zum Schluß $t = 0$ gesetzt werde. t entspricht dann dem im Anschluß an Gl. (89) eingeführten positiven Realteil von q , bei sonst gleicher Bedeutung von p und q wie in (89), und unser Integral nach $d\tau$, nämlich

$$T = \int d\tau \psi(P_1, X) \psi^*(P_2, X) e^{-t(\xi + \eta)}$$

entspricht genau dem in § 10 berechneten Matricelement M_x mit dem Unterschiede, daß in letzterem der Faktor x zu unterdrücken ist. Dies kommt darauf hinaus (vgl. (89) und (90)), daß wir bei der Berechnung von M_x die Differentiation nach p unterdrücken. Wir haben also nach (92) und (94):

$$(B) \quad \begin{cases} T = \frac{\pi}{4} \frac{dV}{dq} = \frac{\pi}{4} \frac{d}{dq} QF = \frac{\pi}{4} \left(\frac{dQ}{dq} F + Q \frac{dF}{dq} \right) \\ \quad = \frac{\pi}{4} \left(\frac{dQ}{dq} F + Q \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dq} \right). \end{cases}$$

Jetzt ist zunächst die Integration nach P_2 auszuführen, nämlich (vgl. (A)):

$$(C) \quad N(P_1) \int_{\Delta P_2} dP_2 N(P_2) T.$$

Ist nun $P_1 \neq P_2$, so ist T im Intervalle ΔP_2 auch im Limes $t \rightarrow 0$ stetig und man kann, falls das Intervall hinreichend klein genommen wird, (C) ersetzen durch

$$N(P_1) N(P_2) \Delta P_2 T(p, q),$$

mit den Werten (vgl. (89)):

$$p = \frac{-ik_1}{2}, \quad q = -t + \frac{ik_2}{2}.$$

Jetzt können wir zur Grenze $t \rightarrow 0$ übergehen, also in T einsetzen

$$p = \frac{-ik_1}{2}, \quad q = + \frac{ik_2}{2}.$$

Dabei verschwindet (vgl. S. 297 oben zwischen Gl. (96) und (97)) dx/dq und dQ/dq , also nach (B) auch T . Unsere Orthogonalitätsbedingung ist damit bewiesen.

Bei der Ableitung des Normierungsfaktors N wollen wir den einfacheren Fall der reinen ebenen Welle ($Z = 0$, keine Kernstreuung) voranstellen. Wir setzen also etwa:

$$\psi(P_1, X) = e^{i k_1 x}, \quad \psi(P_2, X) = e^{i(a x + b y + c z)}.$$

$a b c$ sind die rechtwinkligen Komponenten des Impulses \vec{P}_2 ; wenn seine Richtung mit x und seine Größe mit k_1 nahe übereinstimmen, werden b und c kleine Größen, während a nahezu gleich k_1 wird. Das Intervall ΔP_2 grenzen wir folgendermaßen ab

$$- \Delta a \leq a - k_1 \leq \Delta a, \quad - \Delta b \leq b \leq \Delta b, \quad - \Delta c \leq c \leq \Delta c.$$

Die Normierungsbedingung (A) lautet ausgeschrieben in rechtwinkligen Koordinaten:

$$(D) \quad \int \int \int N(k_1, 0, 0) \int \int \int d x d y d z e^{i k_1 x} \cdot \int \int \int d a d b d c N(a, b, c) e^{-i(a x + b y + c z)} = 1.$$

Wenn wir die Integrationsgrenzen für x, y, z zunächst endlich nehmen ($\pm \omega_x, \pm \omega_y, \pm \omega_z$), so können wir die Integrationsfolge beliebig vertauschen. Wir berechnen zuerst:

$$\int_{-\omega_z}^{+\omega_z} d z e^{-i c z} = 2 \frac{\sin c \omega_z}{c},$$

$$2 \int_{-\Delta c}^{+\Delta c} N(a, b, c) \sin c \omega_z \frac{d c}{c} = 2 \pi N(a, b, 0),$$

wobei wir in der letzten Gleichung rechts bereits zum Limes $\omega_z = \infty$ übergegangen sind. Ebenso

$$\int_{-\omega_y}^{+\omega_y} d y e^{-i b y} = 2 \frac{\sin b \omega_y}{b},$$

$$2 \cdot 2 \pi \int_{-\Delta \eta}^{+\Delta \eta} N(a, b, 0) \sin b \omega_y \frac{d b}{b} = (2 \pi)^2 N(a, 0, 0)$$

und schließlich

$$\int_{-\omega_x}^{+\omega_x} d x e^{-i(a - k_1)x} = 2 \frac{\sin(a - k_1) \omega_x}{a - k_1},$$

$$2 \cdot (2 \pi)^2 \int_{k_1 - \Delta a}^{k_1 + \Delta a} N(a, 0, 0) \sin(a - k_1) \omega_x \frac{d a}{a - k_1} = (2 \pi)^3 N(k_1, 0, 0).$$

Aus (D) folgt nunmehr

$$(E) \quad N^3(k_1, 0, 0) = \frac{1}{(2 \pi)^3}.$$

Wir übertragen dies auf unsere Eigenfunktion ψ (mit Kernstreuung). Dazu vergleichen wir das asymptotische Verhalten von ψ (durch Streuung modifizierte ebene Welle) mit e^{ikz} (reine ebene Welle). Gl. (54) besagt, bei Vernachlässigung des zweiten, im allgemeinen (vgl. unten) kleinen Gliedes:

$$\psi = \frac{(ik\eta)^n}{\Gamma(n+1)} e^{ikz - i\pi n}, \quad \psi^* = \frac{(-ik\eta)^{-n}}{\Gamma(-n+1)} e^{-ikz - i\pi n},$$

also, wegen $i^n = (-i)^{-n} = e^{i\pi n/2}$

$$(F) \quad \psi \psi^* = \frac{e^{-i\pi n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(-n+1)} = \frac{e^{-i\pi n} \sin \pi n}{\pi n} = \frac{1 - e^{-2i\pi n}}{2i\pi n},$$

während für die ebene Welle gilt:

$$e^{ikz} \cdot e^{-ikz} = 1.$$

Mit dem Reziproken des Faktors (F) müssen wir (E) multiplizieren, um das N^2 unserer Eigenfunktion ψ zu erhalten. Letzteres wird also:

$$(G) \quad N^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{in}{1 - e^{-2i\pi n}}.$$

Für $n \rightarrow 0$, d. h. $Z \rightarrow 0$ (keine Kernstreuung) folgt hieraus durch Grenzübergang, wie es sein muß, Gl. (E).

Daß wir in solcher Weise von der reinen ebenen Welle auf die gestreute ebene Welle schließen können, liegt daran, daß N (vgl. den einfacheren Fall in § 4) nur von dem asymptotischen Verhalten der Eigenfunktion abhängt. Dieses aber stimmt, abgesehen von dem Faktor (F), mit dem der ebenen Welle überein, allerdings mit Ausnahme eines schmalen, um die Achse $\eta = 0$ beschriebenen Gebietes (Kernschatten), das wir bei der Anwendung der Gl. (54) vernachlässigt haben.

11. Nach (46a) und (47) gilt mit u statt $x^2/4$:

$$L_n(x) = e^x L_{-n-1}(-x) = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_0^\infty u^{-n-1} e^{-u} I_0(2\sqrt{-ux}) du,$$

somit unter Benützung von (102a)

$$(A) \quad L_n'(x) = \frac{d}{dx} L_n(x) = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int_0^\infty u^{-n} e^{-u} \frac{I_1(2\sqrt{-ux})}{\sqrt{-ux}} du.$$

Dies tragen wir in Gl. (104) für Y_1 ein und finden zunächst:

$$Y_1 = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int u^{-n} e^{-u} du \int e^{-q\eta} I_1(2s\sqrt{\eta}) \frac{I_1(2\sqrt{-ik_1 u \eta})}{\sqrt{-ik_1 u}} d\eta.$$

Das Integral nach η ist mit Hilfe von Note 9 (C) ausführbar. Man erhält:

$$Y_1 = \frac{1}{\Gamma(-n)} \int u^{-n} e^{-u} \frac{i}{q} e^{-\frac{s^2 - ik_1 u}{q}} \frac{I_1\left(\frac{-2is}{q} \sqrt{-ik_1 u}\right)}{\sqrt{-ik_1 u}} du.$$

Wir bringen dies auf die Form (A) durch die Substitution
 $\left(1 - \frac{ik_1}{q}\right) u = v$:

$$Y_1 = \frac{ie^{-\frac{s^2}{q}}}{q - ik_1} \left(\frac{q}{q - ik_1}\right)^{-n_1} \frac{s}{iq} \frac{1}{\Gamma(-n)} \int v^{-n} e^{-v} \frac{I_1(2\sqrt{-vw})}{\sqrt{-vw}} dv$$

$$= \frac{se^{-\frac{s^2}{q}}}{q(q - ik_1)} \left(\frac{q}{q - ik_1}\right)^{-n} L_n'(w); \quad w = \frac{-ik_1 s^2}{q(q - ik_1)}.$$

Hiervon haben wir in Gl. (104d) Gebrauch gemacht.

Zum Schluß möchte ich den Herren G. Schur und O. Scherzer für ihre wertvolle Hilfe bei den langwierigen Rechnungen danken. Von Hrn. Scherzer rühren z. B. die Durchführung von § 14 und die Noten **10** und **11** her. Auf die Mitwirkung von Hrn. A. Maue wurde bereits in § 9 und § 13 hingewiesen.

München, Juni 1931.

(Eingegangen 8. Juni 1931)

**Über den Gleichrichtereffekt und
über Leuchterscheinungen an Carborundkristallen
Von Bruno Claus**

(Mit 16 Figuren)

**Untersuchungen der Gleichrichterwirkung in Abhängigkeit vom
Kontaktdruck**

Zur Erklärung der Kristallgleichrichterwirkung wurde von G. Hoffmann¹⁾ zuerst die Vermutung ausgesprochen, daß die Lösung des Detektorproblems eng verbunden sei mit dem der Elektronenvorgänge an der Oberfläche leitender Körper unter Wirkung hoher elektrischer Felder.²⁾ Versuche ergaben kritische Feldstärken, bei denen ein Übergang der Elektronen beginnt. Für Cu lag beispielsweise diese kritische Feldstärke bei $3,5 \cdot 10^6$ Volt/cm, bei Zn hingegen trat schon ein Elektronenübergang bei $2,7 \cdot 10^6$ Volt/cm, bei Bleiglanz schon bei einer Feldstärke von $2,2 \cdot 10^6$ Volt/cm ein. Nimmt man an, daß Detektorspitze und Kristall durch eine sehr schmale isolierende Zwischenschicht getrennt sind, so wäre bei einer am Kristall und an der Spitze anliegenden genügend hohen Spannung in dieser Trennschicht die zum Elektronenaustritt erforderliche hohe Feldstärke vorhanden. Da nun die Anzahl der bei einer bestimmten Feldstärke aus der Spitze bzw. aus dem Kristall austretenden Elektronen vom Material abhängig ist, so könnte die Gleichrichterwirkung auf diese zwischen Spitze und Kristall auftretenden Elektronenvorgänge zurückgeführt werden. Schottky³⁾ hat unter den gleichen Gesichtspunkten das Detektorproblem theoretisch untersucht. Durch diese Theorie würde eine Erscheinung, die schon früh beobachtet wurde, das

1) G. Hoffmann, *Physikal. Ztschr.* **22**. S. 422. 1922.

2) G. Hoffmann, *Physikal. Ztschr.* **11**. S. 961. 1910; *Ztschr. f. Phys.* **4**. S. 363. 1921.

3) W. Schottky, *Ztschr. f. Phys.* **14**. S. 63. 1923.

Nachlassen des Gleichrichtereffektes bei Erhöhung des Kontaktdruckes seine Erklärung finden. Mit zunehmendem Drucke muß eine Deformation und schließliche Zerstörung der distanzwährenden Zwischenschicht und somit ein Rückgang des Gleichrichtereffektes mit wachsendem Drucke eintreten.

Um nun den Nachweis dieses funktionalen Zusammenhanges zwischen Kontaktdruck und Gleichrichtereffekt zu führen, wurden in der vorliegenden Arbeit Messungen der Gleichrichterwirkung des Detektors in Abhängigkeit vom Kontaktdruck angestellt.

Die experimentellen Schwierigkeiten bestanden hauptsächlich in der Herstellung definierter Kontaktdrucke. Da besonders

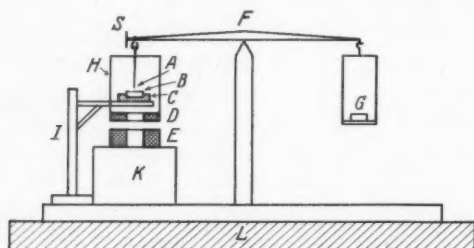


Fig. 1

bei den sehr geringen Kontaktdrücken geringste Veränderungen des Druckes sich schon sehr störend bemerkbar machten, mußte auf einen möglichst erschütterungsfreien Aufbau der Apparatur größte Sorgfalt verwandt werden.

Zur Herstellung definierter variabler Kontaktdrucke wurden zwei verschiedene Einrichtungen benutzt. Fig. 1 zeigt eine der beiden benutzten Einrichtungen.

An einem Hebelarm F einer empfindlichen Waage wurde an Stelle der Waagschale ein Drahtgestell H gehängt, an dem eine Solenoidspule D befestigt war, deren Gewicht durch ein Gegengewicht G am anderen Hebelarm kompensiert wurde. An dem Drahtgestell H war fernerhin die Detektorkontaktspitze A angebracht. Unterhalb der Spule D befand sich eine zweite Spule E und unterhalb der Detektorspitze A war der zu unter-

suchende Kristall auf einer Brücke angeordnet. Die Brücke konnte durch eine Mikrometerschraube gehoben werden, so daß es ermöglicht wurde, zwischen Kontaktspitze und Kristall den Abstand Null einzustellen, was durch Spiegelablesung (S) festgestellt wurde. Die Eichung der Waage auf Kontaktdrucke geschah derart, daß der bei bestimmtem Stromfluß durch die gegenseitige Anziehung der beiden Solenoide hervorgerufene Ausschlag durch Gegengewichte kompensiert wurde. Die ganze Meßvorrichtung stand erschütterungsfrei auf einer großen stationären Masse (mehrere Zentner Blei), die auf einem starken Zementsockel derart aufgebaut war, daß sich zwischen dem Blei und dem Sockel eine Erschütterungen dämpfende Gummischicht befand. Da trotzdem sich am Tage noch Erschütterungen bemerkbar machten, wurden die Messungen nachts ausgeführt.

Für höhere Drucke wurde die in Fig. 2 dargestellte Vorrichtung gebraucht.

A ist der Kristall, S ist die Kontaktspitze, B die Unterlage, auf der der Kristall in Zinn eingeschmolzen angeordnet ist. Diese Unterlage ruht auf einem Gummischlauch E , der ringförmig geschlossen ist und an der Seite eine Zuführung besitzt, von der ein Schlauch D zu dem Glasrohr F führt. Glasrohr und Gummiring wurden mit Hg gefüllt. Durch Heben und Senken des Glasrohres mittels einer Mikrometerschraube konnte dann bewirkt werden, daß der Kristall mit beliebig wählbarem Drucke gegen die Spitze S gedrückt wurde.

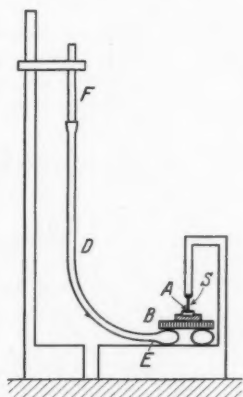


Fig. 2

Im folgenden wurden Charakteristiken an Carborundum bei konstanter Spannung und variiertem Druck zwischen Cu-Spitze und Kristall vorgenommen. Es wurde zunächst 50 periodiger Wechselstrom benutzt und die gleichgerichtete Stromkomponente mit einem Gleichstrominstrument festgestellt. Fig. 3 gibt das Ergebnis einiger solcher Messungen wieder. Ähnliche Messungen für Gleichstrom zeigt Fig. 4.

Die Messungen lassen erkennen, daß SiC bei niederen Drucken dem Strome einen sehr großen Widerstand entgegensetzt, bis bei einem bestimmten Kontaktdruck die durch den Kristall fließende Stromstärke sich sprunghaft ändert. Bei einer Spannung von 2 Volt ändert sich der Strom bei einem Kontaktdruck von 80 auf

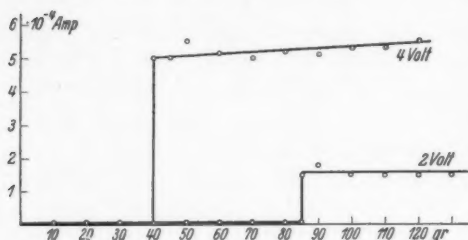


Fig. 3

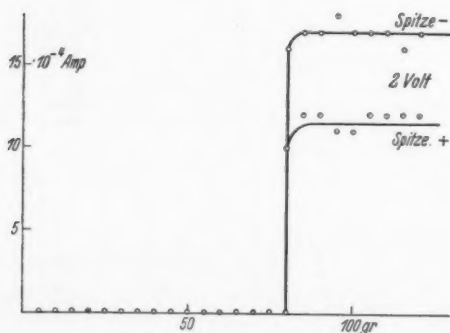


Fig. 4

die bei bestimmten Kontaktdrucken deformiert und teilweise zerstört wird, kann diese sprunghafte Stromänderung erklärt werden. Bei weiterer Steigerung des Kontaktdruckes zeigte der Kristall sich wieder in hohem Maße druckunempfindlich, es traten nur ganz geringe weitere Stromänderungen mit weiterhin zunehmendem Kontaktdruck ein.

Ein Gleichrichtereffekt ist bei niederen Kontaktdrucken nur

druck von 80 auf 90 g um zwei Zehnerpotenzen. Bei einer Spannung von 5 Volt liegt diese sprunghafte Stromänderung in den beschriebenen Fällen schon bei einem Kontaktdruck von 60 g.

Die Tatsache dieser starken Stromänderung bei bestimmten Kontaktdrucken bestätigt das Vorhandensein einer zwischen Kristall und Kontaktspitze sich befindenden Trennschicht, denn nur durch eine solche schlecht leitende Zwischenschicht,

in geringer Größe feststellbar. Erst nachdem der Stromdurchschlag erfolgt ist, also bei einer Spannung von 5 Volt z. B. bei einem Kontaktdruck von 60 g, trat mit der bedeutend angestiegenen Stromstärke ein ausgeprägter Gleichrichtereffekt auf.

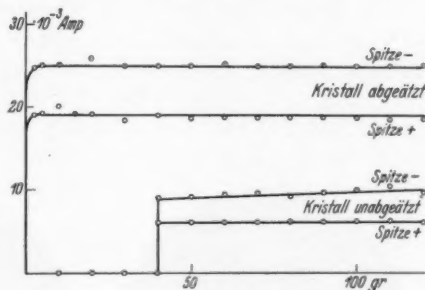
Um die Natur der isolierenden Zwischenschicht festzustellen, wurden folgende Versuche angestellt.

Die SiC-Kristalle entstehen im elektrischen Ofen, also bei Weißglut, und aus diesem Grunde liegt die Vermutung nahe, daß schon von vornherein sie mit einer dünnen molekularen

Kieselsäureschicht umgeben sind. Durch Abätzen der Kieselsäureschicht müßte man dann Carborundkristalle erhalten, die den in Fig. 3 und 4 dargestellten Stromdurchschlag nicht zeigen. In der Tat

zeigte das Experiment den erwarteten Effekt; die abgeätzten Kristalle zeigten bereits bei geringsten Kontaktdrücken die großen Stromstärken, die sich bei unabgeätzten Kristallen erst bei höheren Kontaktdrücken ergaben (Fig. 5).

Der Gleichrichtereffekt ist auch bei abgeätzten Kristallen noch deutlich feststellbar. In Fig. 6 und 7 sind zwei Stromspannungscharakteristiken dargestellt, einmal aufgenommen an einem nicht abgeätzten Kristall, das andere Mal an einem abgeätzten, Fig. 6 für Gleichstrom, Fig. 7 für Wechselstrom. Die ganze Kurve läuft beim abgeätzten Kristall steiler, was durch Wegfall der isolierenden Schicht erklärlich ist. Die Stromspannungscharakteristiken, aufgenommen mit Gleichstrom, zeigen also sowohl beim abgeätzten als auch beim unabgeätzten Kristall denselben Charakter. Bei Benutzung von Wechselstrom war in vielen Fällen zu beobachten, daß bei abgeätzten Kristallen die gleichgerichtete Stromkomponente kleiner war. Fig. 7 zeigt derartige Messungen.



Spannung am Kristall 10 Volt

Fig. 5

Die Reproduzierbarkeit der Meßergebnisse an derselben Kontaktstelle war vollkommen, wenn die Drucke nur bis zu der Größe variiert wurden, bei der der spontane Stromanstieg erfolgte. War aber dieser Stromdurchschlag eingetreten, so ergab die Wiederholung der Messung an derselben Kontakt-

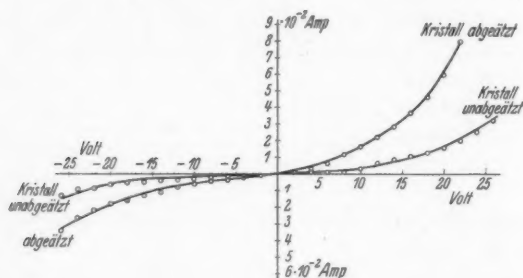


Fig. 6

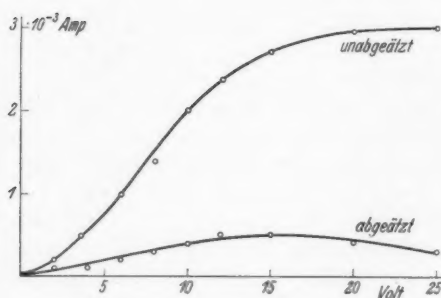


Fig. 7

stelle wohl ein ähnliches Kurvenbild, aber die Größe des Kontaktdruckes, bei der der Stromdurchschlag erfolgte, war jetzt im allgemeinen geringer. Diese Änderungen lassen darauf schließen, daß durch die hohen Kontaktdrucke bzw. durch den Stromdurchschlag die isolierende Zwischenschicht an der Kontaktstelle Veränderungen erleidet, teilweise vielleicht zerstört wird.

Die Messungen an Carborund sprechen also für die Existenz einer Sperrschicht. Wie aus den im folgenden Teil beschriebenen Messungen hervorgeht, ist anscheinend das Zustandekommen des Gleichrichtereffektes außer von der Sperrschicht noch von anderen Ursachen abhängig. Es handelt sich wahrscheinlich um eine Überlagerung mehrerer Vorgänge, wie weiter unten ausgeführt wird.

Leuchterscheinungen an Carborundkristallen

An SiC-Kristallen wurden Leuchterscheinungen beobachtet, deren nähere Untersuchung Beziehungen zum Gleichrichtereffekt des Kristalls zeitigten.

Ist die Metallspitze mit dem negativen Pol der Stromquelle verbunden, so bildet sich in weitem Umkreis um die

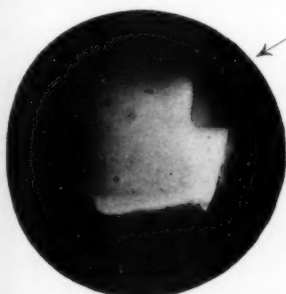


Fig. 8

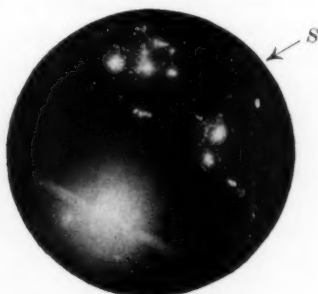


Fig. 9

Mikrophotographie der gelben und blauen Leuchterscheinung

Berührungsstelle eine gelbe zusammenhängende Leuchterscheinung aus. Kommutiert man den Strom, so tritt an ihre Stelle eine scheinbar ganz anders geartete Erscheinung. Es entstehen dann nämlich in weitem Umkreis um den Berührungspunkt der Spitze eine große Anzahl blau leuchtender Punkte. Bei einem zwischen zwei Spitzen eingespannten Kristall sieht man, daß die gelbe flächenhafte Leuchterscheinung immer an der Seite des Kristalls auftritt, die von der negativen Spitze berührt wird. Die blaue punktförmige Leuchterscheinung bildet sich gleichmäßig in weitem Umkreis um die Berührungsstelle der positiven Spitze aus. Die beiden Figg. 8 und 9 sind mikroskopische

Aufnahmen der beiden Erscheinungen (Vergrößerung etwa 30fach). In Fig. 8 ist die an der negativen Spitze auftretende Erscheinung dargestellt. Der Einschnitt *S* ist die den Kristall berührende Spitze. Die scharf hervortretenden Kanten sind Kristallkanten, zum Teil Bruchstellen, die sich über die Oberfläche erstrecken. Die besonderen Kennzeichen dieser Erscheinung sind also ihr gelbes Licht, ihre zusammenhängende Flächenhaftigkeit und ihr Auftreten an der negativen Elektrode. In Fig. 9 sind die in Nähe der positiven Elektrodenspitze auftretenden blauen Leuchtpunkte dargestellt. Beide Figuren zeigen dieselbe Stelle des Kristalls mit dem einzigen Unterschiede, daß in Fig. 8 die Spitze Kathode, in Fig. 9 Anode ist. Beide Leuchterscheinungen treten um so ausgeprägter auf, je feiner die Spitze ausgebildet ist. Eine Eigentümlichkeit der gelben Leuchterscheinung ist, daß sie am ausgeprägtesten an sauber ausgebildeten Kristallen auftritt, und zwar hauptsächlich an der Basisfläche der hexagonalen Tafeln.

Bei der Untersuchung der Spektren der beiden Leuchterscheinungen ergibt sich, daß in beiden Fällen kontinuierliche Spektren vorliegen, wie Figg. 10 und 11 zeigen. Fig. 10 stellt das Spektrum der gelben Leuchterscheinung an der negativen Spitze dar. Als Bezugsspektrum wurde das Hg-Spektrum darüber aufgenommen. Die Lücken in beiden Spektren sind, wie sich durch Vergleichsaufnahmen mit einer Bogenlampe ergab, Sensibilisationslücken der photographischen Platte. Das Spektrum der gelben Leuchterscheinung erstreckt sich bis über die grünblaue Hg-Linie (4916), es stellt ein kontinuierliches Spektrum dar. Dasselbe gilt für die blaue Leuchterscheinung an der positiven Spitze (Fig. 11). Das Spektrum erstreckt sich bis über die violette Hg-Linie (4047). Die Spektren wurden bei einer am Kristall liegenden Spannung von 25 Volt aufgenommen. Die Expositionszeit betrug bei dem intensiveren Spektrum in beiden Fällen 3, bei den weniger intensiven 1 Std. bei einer Blendenöffnung von 1:30. Die Aufnahmen wurden bei Zimmertemperatur gemacht. Um strukturverwischende Wärmestörungen auszuschalten, wurden subjektiv durch Beobachtung mit dem Spektralapparat spektroskopische Untersuchungen der Leuchterscheinungen auch bei tieferen und höheren Temperaturen angestellt.

Zunächst wurde der Kristall in flüssige Luft gebracht und das Spektrum der gelben Leuchterscheinungen untersucht. Dabei trat bei allen Kristallen ein ausgeprägter Farbumschlag ein. Während bei Zimmertemperatur die Strahlung gelb- bis orangefarbig war, leuchtete in flüssiger Luft der Kristall blaugrün, und zwar bedeutend intensiver. Wurde der Kristall aus



Spektrum der gelben Leuchterscheinung
Fig. 10



Spektrum der blauen Leuchterscheinung
Fig. 11

der flüssigen Luft herausgenommen, so ging diese blaugrüne Strahlung mit zunehmender Erwärmung kontinuierlich zurück und verwandelte sich schließlich wieder bei Temperatúrausgleich in die ursprüngliche Strahlung orangeroter Farbe.

Bei den spektroskopischen Untersuchungen war deutlich eine mit der Veränderung der Farbe parallele Änderung des Spektrums zu beobachten. Bei Zimmertemperatur war der rote Teil des Spektrums besonders intensiv ausgebildet. Mit abnehmender Temperatur verschob sich diese Stelle besonderer

Intensität kontinuierlich nach der kurzwelligen Seite hin. Eine Struktur war auch bei diesen tiefen Temperaturen nicht festzustellen. Unter flüssiger Luft leuchtete das Spektrum besonders intensiv im grünen Bereich. Beim Erwärmen des Kristalls ließ sich deutlich eine Verschiebung dieses Intensitätsmaximums nach der langwelligen Seite hin beobachten, bis es schließlich bei Zimmertemperatur wieder im roten Bereich in die Nähe der Hg-Linie (5769) zu liegen kam. Die spektrographischen Aufnahmen dieser Maximumverschiebung scheiterten an der erforderlichen langen Belichtungszeit. Als Ergebnis dieser Untersuchungen ist also zu verzeichnen, daß bei einer Abkühlung des Kristalls um etwa 180° das Maximum des ausgestrahlten Lichtes sich etwa um 2000 \AA nach der kurzwelligen Seite des Spektrums hin verschiebt. In nachstehender Tabelle ist die Lage des Intensitätsmaximums in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt. Dabei wurde der Kristall erst in flüssige Luft gebracht, also auf -180° abgekühlt, darauf in einer Kältemischung von Kohlensäure und Aceton, dann bei Zimmertemperatur und schließlich bei einer Temperatur von $+120^\circ$ unter erwärmtem Paraffin untersucht.

Tabelle 1

Temperatur in $^\circ$	Lage von	— Maximum
— 180	im grünen Bereich des Spektrums	
— 80	„ gelben	„ „ „
+ 20	„ roten	„ „ „
+ 120	„ „	„ „ „

Dieselben Versuche, die auch bei der anderen, vorzugsweise an der positiven Stromzuführung auftretenden Leuchterscheinung angestellt wurden, zeigten, daß bei diesen blauen Leuchtpunkten keine Änderung des Spektrums mit der Temperatur beobachtet werden konnte.

Um Einflüsse des äußeren Luftdruckes auf die beiden Leuchterscheinungen festzustellen, wurden die Leuchterscheinungen im Hochvakuum untersucht. Auch bei einem Drucke von 10^{-5} mm zeigten hierbei die beiden Leuchterscheinungen sowohl ihrer ganzen Beschaffenheit nach als auch in ihrer spektralen Eigenschaft keine Veränderungen. Fig. 12 stellt die

benutzte Anordnung dar. K ist die Kathode, A die Anode, C der Kristall, B sind die Klemmen, in denen er gehalten wurde, S ist die den Kristall berührende Spitze. Durch die Einschmelzungen E und F geschah die Zuführung zum Kristallstromkreis, durch den Glasstutzen wurde das Rohr evakuiert. Durch elektrische Heizung von außen und durch Elektronenbombardement konnten Röhre und Kristall

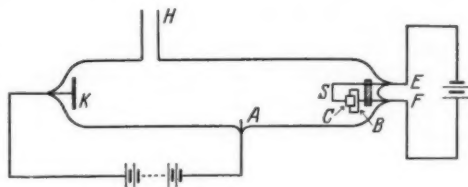


Fig. 12

hinreichend entgast werden, so daß ein Vakuum von 10^{-5} mm gewährleistet war.

Es ist nun naheliegend, den Zusammenhang zwischen den Leuchterscheinungen und den elektrischen Vorgängen zu untersuchen.

Die zu diesem Zwecke aufgenommenen Stromspannungskurven zeigten bei solchen Kristallen, an denen die Leuchterscheinungen sehr ausgeprägt auftraten, Neigungsänderungen, wie aus Fig. 13 erhellt.

Man erkennt, daß sowohl bei 4–6 Volt, wo die gelbe, als auch bei 16–20 Volt, wo die blaue Leuchterscheinung auftritt, der Verlauf der Kurve merklich steiler wird. — Der verschiedenartige Verlauf der beiden Kurvenzweige zu beiden Seiten der Abszisse zeigt deutlich das Vorhandensein des Gleichrichtereffektes bis zu hohen Spannungen.

Bei tiefen Temperaturen — die ganze Apparatur wurde in flüssige Luft oder in ein Kohlensäureacetongemisch gebracht — zeigten die Stromspannungskurven den in Fig. 14 wiedergegebenen Verlauf. Mit sinkender Temperatur wird der Kurvenverlauf flacher und bei -180° sind keine Neigungsänderungen mehr wahrzunehmen. Die Kurven zeigten hier innerhalb des untersuchten Spannungsbereichs einen streng linearen Anstieg. Der Gleichrichtereffekt ist, da die Kurve symmetrisch verläuft, bei -180° völlig verschwunden, erweist sich also im hohen Grade temperaturabhängig. Diese Tempe-

raturabhängigkeit des Effektes äußerte sich besonders deutlich dann, wenn der Kristall zunächst auf die Temperatur der flüssigen Luft abgekühlt wurde, dann aber aus derselben herausgebracht wurde, so daß er sich allmählich wieder auf

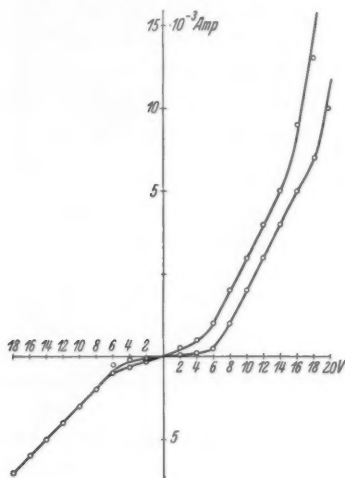


Fig. 13

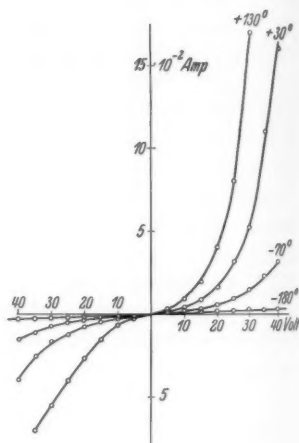


Fig. 14

Tabelle 2

Zeit nach der Entfernung der flüssigen Luft in Minuten	S t r o m	
	Kristall positive in Ampere	negative Elektrode in Ampere
1	$12 \cdot 10^{-4}$	$11 \cdot 10^{-4}$
2	$22 \cdot 10^{-4}$	$16 \cdot 10^{-4}$
3	$35 \cdot 10^{-4}$	$18 \cdot 10^{-4}$
4	$52 \cdot 10^{-4}$	$21 \cdot 10^{-4}$
5	$69 \cdot 10^{-4}$	$23 \cdot 10^{-4}$
6	$87 \cdot 10^{-4}$	$28 \cdot 10^{-4}$
7	$96 \cdot 10^{-4}$	$30 \cdot 10^{-4}$
8	$108 \cdot 10^{-4}$	$31 \cdot 10^{-4}$
9	$114 \cdot 10^{-4}$	$32 \cdot 10^{-4}$
10	$122 \cdot 10^{-4}$	$32 \cdot 10^{-4}$
11	$125 \cdot 10^{-4}$	$33 \cdot 10^{-4}$
12	$127 \cdot 10^{-4}$	$33 \cdot 10^{-4}$
13	$128 \cdot 10^{-4}$	$33 \cdot 10^{-4}$
14	$128 \cdot 10^{-4}$	$34 \cdot 10^{-4}$
15	$129 \cdot 10^{-4}$	$34 \cdot 10^{-4}$

Zimmertemperatur erwärmen konnte. Die Tab. 2 wurde auf diese Art gewonnen. An den Kristall wurde eine Spannung von 20 Volt gelegt und die Zunahme des durch den Kristall fließenden Stromes in Abhängigkeit der allmählich eintretenden Wiedererwärmung festgestellt. Es flossen bei der Temperatur der flüssigen Luft durch den Kristall, wenn die Kontaktspitze negativ war, $8 \cdot 10^{-4}$ Amp., wenn sie positiv war, $7 \cdot 10^{-4}$ Amp. Wurde der Kristall aus der flüssigen Luft herausgenommen, so änderten sich die Verhältnisse, wie die Tabelle zeigt. Um die Messungen auch auf höhere Temperaturbereiche auszudehnen, wurde der Kristall in ein Paraffinbad gesetzt. Tab. 3 zeigt, daß zwischen 150 und 50° mit Temperaturabnahme eine starke Stromverminderung verbunden ist. Die Spannung zwischen Spitze und Kristall beträgt + 20 bzw. - 20 Volt.

Tabelle 3

Temperatur in Grad	S t r o m	
	Kristall positive in Ampere	negative Elektrode in Ampere
150	$49 \cdot 10^{-3}$	$30 \cdot 10^{-3}$
140	$45 \cdot 10^{-3}$	$29 \cdot 10^{-3}$
130	$43 \cdot 10^{-3}$	$28 \cdot 10^{-3}$
120	$42 \cdot 10^{-3}$	$26 \cdot 10^{-3}$
110	$40 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-3}$
100	$38 \cdot 10^{-3}$	$23 \cdot 10^{-3}$
90	$36 \cdot 10^{-3}$	$20 \cdot 10^{-3}$
80	$34 \cdot 10^{-3}$	$17 \cdot 10^{-3}$
70	$30 \cdot 10^{-3}$	$13 \cdot 10^{-3}$
60	$25 \cdot 10^{-3}$	$10 \cdot 10^{-3}$
50	$20 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$

Das gelbe Leuchten an der Kathode tritt bei tiefen Temperaturen bereits bei geringerer Spannung auf, nämlich bei 2—3 Volt in flüssiger Luft gegenüber 4—6 Volt bei Zimmertemperatur. Ebenso erscheint das blaue Leuchten an der Anode schon bei einer Spannung von 8—12 Volt, während es bei Zimmertemperatur erst bei 14—16 Volt wahrnehmbar war.

Fig. 14 gibt eine graphische Darstellung der beschriebenen Temperaturabhängigkeitsmessungen wieder.

Um die Natur der Leuchterscheinungen eingehender zu prüfen, wurde ihre Umgebung mittels elektrostatischer Sonden, die über der Oberfläche angeordnet wurden, abgetastet, so

daß ein etwaiger Elektronen- bzw. Ionenaustritt aus der leuchtenden Fläche elektrostatisch festgestellt werden konnte. Zwischen Kristall und Spitze befand sich die variable Spannung D (Fig. 15). Das Feld zwischen Kristall und Sonde wurde durch Anlegen einer wählbaren Spannung S an den bernsteinisolierten Kristall

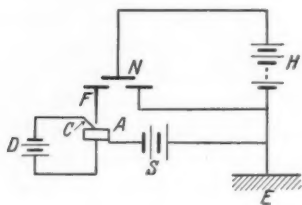


Fig. 15

hergestellt. Für gute Isolation (Bernstein) der Batterie D ist natürlich auch Sorge zu tragen. Die Apparatur war möglichst erschütterungsfrei auf einer stationären Bleimasse von mehreren Zentnern, die auf einer Gummischicht stand, angeordnet. Der Meßquadrant konnte elektromagnetisch geerdet und freigemacht werden.

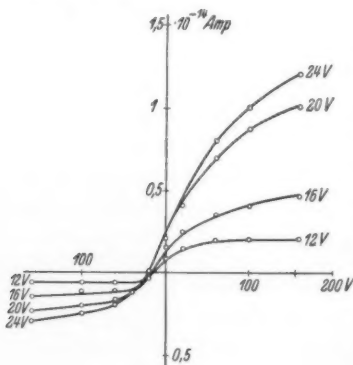


Fig. 16

Die Spannung zwischen Kristall und Spitze betrug zunächst 24 Volt, später 20, 16 und 12 Volt. Abszisse ist die Spannung zwischen Kristall und Sonde. Ordinate ist der aus der Aufladung des Elektrometers resultierende Strom zwischen Kristall und Sonde in 10^{-14} Amp. Fig. 16 zeigt einige Meßergebnisse, die bei derartigen Untersuchungen, der blauen Leuchterscheinung gewonnen wurden.

Parameter der Kurven war die jeweils die Leuchterscheinung hervorrufoende Spannung. Aus den Kurven ergibt sich, daß bei niederen Feldstärken, wenn der Kristall gegen die Sondenspitze positiv geladen ist, der übergehende Strom mit wachsender Feldstärke zunächst stark, dann bei höheren Feldstärken schwächer ansteigt.

Sinkt die Detektorspannung unterhalb 14 Volt, so daß die Leuchterscheinung verschwindet, so sinkt plötzlich der aus den

Leuchtstellen austretende Ionenstrom — wie die Kurve mit 12 Volt zeigt — stark ab, und bei einer Detektorspannung von 8 Volt verschwindet er völlig. Wenn der Kristall negatives Potential gegenüber der Sondenspitze besitzt, so ist, wie die Kurven zeigen, auch ein Strom nachweisbar, dessen Größe etwa eine Zehnerpotenz niedriger liegt. Die Kurven zeigen also, daß aus den blauleuchtenden Punkten unter Wirkung einer Feldstärke Ladungsträger austreten.

Der wahre Wert der Potentialdifferenz zwischen Sonde und Kristall wird nicht bedingt allein durch die angelegte Spannung S , es treten vielmehr an jedem Punkt der Kristalloberfläche zusätzliche positive oder negative Spannungen auf, deren Betrag durch die Größe der zwischen Kristall und Spitze gelegten Spannung D bedingt ist. Als Folge hiervon ergibt sich, daß die Kurven in Fig. 16 nicht durch den Nullpunkt gehen.

Dieselben Versuche bei der zusammenhängenden flächenhaften Leuchterscheinung an der negativen Elektrode führten zu einem negativen Ergebnis. Es waren keine aus dem Kristall austretende auf die Spitze übergehende Ladungsträger nachzuweisen.

Mittels Sonden wurde fernerhin die Oberfläche von SiC-Kristallen in bezug auf ihre elektrische Leitfähigkeit untersucht. Dabei wurde der Kristall in einen Stromkreis geschaltet und die Sonde mit definiertem Druck auf eine glatte Kristallfläche aufgesetzt. Der Kristall war auf einer Mikrometerschraube angeordnet, so daß er unter der Sondenspitze um geringe Strecken verschoben werden und somit die ganze Oberfläche des Kristalls mit der Sondenspitze abgetastet werden konnte. Die Sondenspitze wurde mittels eines 100 g-Gewichtes auf die Oberfläche des Kristalls aufgedrückt und der durch den Kristall fließende Strom galvanometrisch gemessen. Darauf wurde die Sondenspitze, die in einer festmontierten Führung lief, abgehoben, der Kristall um Bruchteile eines Millimeters verschoben, die Sondenspitze wieder mit gleichem Druck aufgesetzt und der Strom bei gleicher Spannung wie an der Nachbarstelle gemessen. So wurde die ganze Kristalloberfläche abgetastet und bei gleicher Spannung die Stromstärke an allen Stellen gemessen. Eine solche Messung zeigt Tab. 4.

Die abgetastete Stelle betrug etwa 2 mm^2 . An der Sondenspitze lag der negative Pol der Stromquelle, ihre Spannung

Tabelle 4

1 -	$1,4 \cdot 10^{-4}$ Amp.	13 -	$1,2 \cdot 10^{-4}$ Amp.
2 -	$1,0 \cdot 10^{-4}$ "	14 -	$1,3 \cdot 10^{-4}$ "
3 -	$1,6 \cdot 10^{-4}$ "	15 -	$2,2 \cdot 10^{-4}$ "
4 -	$3,6 \cdot 10^{-4}$ "	16 -	$1,5 \cdot 10^{-4}$ "
5 -	$1,5 \cdot 10^{-4}$ "	17 -	$1,5 \cdot 10^{-4}$ "
6 -	$65,0 \cdot 10^{-4}$ "	18 -	$1,4 \cdot 10^{-4}$ "
7 -	$2,0 \cdot 10^{-4}$ "	19 -	$12,0 \cdot 10^{-4}$ "
8 -	$2,2 \cdot 10^{-4}$ "	20 -	$12,9 \cdot 10^{-4}$ "
9 -	$3,4 \cdot 10^{-4}$ "	21 -	$33,0 \cdot 10^{-4}$ "
10 -	$0,5 \cdot 10^{-4}$ "	22 -	$1,1 \cdot 10^{-4}$ "
11 -	$105,0 \cdot 10^{-4}$ "	23 -	$1,1 \cdot 10^{-4}$ "
12 -	$1,4 \cdot 10^{-4}$ "	24 -	$1,3 \cdot 10^{-4}$ "

betrug 1 Volt, lag also unterhalb der Grenzen, bei der die Leuchterscheinungen einsetzen. Die abgetasteten Stellen des Kristalles sind in der Tab. 13 fortlaufend numeriert. Diese Messung als Beispiel zeigt deutlich, daß die Leitfähigkeit eines SiC-Kristalls an den verschiedenen Stellen eine äußerst verschiedene ist, die Stromstärke schwankt innerhalb zweier Zehnerpotenzen. Alle weiteren Messungen bei den verschiedenen SiC-Kristallen zeigten dieselben charakteristischen Stromstärkeunterschiede an ganz benachbart liegenden Stellen der Kristalloberfläche wie die als Beispiel mitgeteilte Tabelle.

Eine Erklärung hierfür liegt nahe. Da der Kristall sicher nicht homogen durchgebildet ist, so kann man die Existenz derartiger Punkte bevorzugter Leitfähigkeit so erklären, daß von diesen Stellen aus sich Kanäle in den Kristall hinein erstrecken, die z. B. bei der Auskristallisation entstanden sind und die aus nicht mit auskristallisierten Kohlepartikeln oder anderen den in Kristall eingeschlossenen Metallfremdkörpern bestehen. Erhärtet wird diese Annahme durch die Untersuchungen an sehr unsauberen Kristallen, bei denen solche Punkte großer Leitfähigkeit besonders häufig anzutreffen sind.

Auch diese Stellen hoher Leitfähigkeit zeigten Beziehungen zu den Leuchterscheinungen. Wurde der Kristall in einen Stromkreis derart eingeschaltet, daß bei genügend hoher Spannung die beiden Leuchterscheinungen zu beobachten waren, und darauf die Kontaktspitze auf einen solchen Punkt besonders hoher Leitfähigkeit aufgesetzt, so traten beide Leuchterscheinungen nicht auf.

In bezug auf den Gleichrichtereffekt kann man noch folgende

Feststellungen machen, die Parallelen zu oben beschriebenen Befunden über die Leuchterscheinungen zeigen. Ein Gleichrichtereffekt tritt nicht oder nur in ganz geringem Maße ein, wenn der Kristall auf beiden Seiten, z. B. in Zinn oder Wood-sches Metall eingeschmolzen ist und diese Einschmelzstellen als Elektroden benutzt werden. Der Gleichrichtereffekt wird um so ausgeprägter, je größer der Unterschied der Berührungsflächen der beiden Elektroden gewählt wird. Besonders also dann, wenn der Kristall auf der einen Seite eingeschmolzen, auf der anderen Seite von einer Spitze berührt wird. In bezug auf die beiden Leuchterscheinungen konnten analoge Feststellungen gemacht werden.

Zum Schluß sei noch kurz eine Beobachtung erwähnt. Die Stromrichtung der gleichgerichteten Komponente führt in der Regel bei allen SiC-Kristallen von der Kontaktspitze zur Einschmelzstelle. Unter Stromrichtung sei hierbei die Elektronenstromrichtung verstanden. Es fließt also durch den Kristall ein größerer Strom, wenn die Kontaktspitze negativ ist. In seltenen Fällen wurde eine Stromumkehr der gleichgerichteten Komponente beobachtet. Diese Beobachtung wurde schon von Szekely de Doba¹⁾ gemacht. Während bei PbS die Stromumkehr öfter zu beobachten ist, kann sie bei SiC-Kristallen nur in seltenen Fällen festgestellt werden. Dabei stellte sich dann heraus, daß in diesen Fällen der Kristall sich aus seiner Einschmelzmasse gelöst hatte, jedenfalls von dieser nicht mehr festgehalten wurde, sondern mit ihr einen Wackelkontakt bildete. In diesem Falle bildete sich die gelbe Leuchterscheinung auch intensiv an der Einschmelzstelle, wenn diese Kathode war, aus. Demzufolge scheint also zwischen dem Gleichrichtereffekt und den Leuchterscheinungen ein gewisser Zusammenhang zu bestehen. Um sich über diesen Zusammenhang ein Bild machen zu können, erscheint es jedoch vorher wichtig, eine Erklärung für das Auftreten der Leuchterscheinungen zu finden.

Deutungsversuch der Leuchterscheinungen und des Gleichrichtereffektes

Ein Erklärungsversuch der Leuchterscheinungen muß von ihren optischen Eigenarten, ihren Beziehungen zu den elek-

1) Szekely de Doba, Wiener Ber. S. 719. 1918.

trischen Vorgängen und den äußeren Bedingungen, unter denen sie eintreten, ausgehen.

Um eine Temperaturstrahlung kann es sich bei der gelben Leuchterscheinung offenbar nicht handeln, obwohl zunächst die Strukturlosigkeit des Spektrums darauf hinzuweisen scheint; denn bei einer Temperaturstrahlung könnte ja auf keinen Fall eine Verschiebung des Intensitätsmaximums im Spektrum bei Erniedrigung der Temperatur nach dem kurzwelligen Gebiete hin folgen.

Schwierigkeiten stellen sich auch der Annahme entgegen, die Leuchterscheinung als eine Lumineszenzstrahlung, speziell als Kathodolumineszenz aufzufassen, denn zunächst sind auch bei tiefen Temperaturen, bei denen eine Wärmestörung als völlig ausgeschaltet betrachtet werden kann, keine Banden oder Linien zu finden. Die Leuchterscheinung wurde z. B. mehrere Male bei sehr kleiner Blendenöffnung und möglichst engem Spalt mit einem Spektrographen aufgenommen, der die Natrium-*D*-Linien noch trennte, und die Platte mehrere Tage lang belichtet. Dabei stand die Apparatur erschütterungsfrei auf einem Zementsockel. Auch bei derartigen Aufnahmen war keine Struktur im Spektrum festzustellen. Eine Lumineszenzerscheinung im gewöhnlichen Sinne dieser Bezeichnung kann also ebenfalls nicht vorliegen, und somit ist das Gebiet der Möglichkeiten schon ziemlich eng abgegrenzt. Ein strukturloses Spektrum liegt außer bei der Temperaturstrahlung, die aus den obigen Gründen auszuschließen ist, nur noch bei der Bremsstrahlung vor. Versuchen wir die gelbe Leuchterscheinung als Bremsstrahlung zu deuten. Ihre Entstehung müßte dann so erfolgen, daß die aus der Spitze austretenden Elektronen durch die am Kristall liegende Spannung beschleunigt werden, bis sie schließlich durch Zusammenstöße mit Gitteratomen gebremst werden. Man hat es also mit einem dem kontinuierlichen Röntgenspektrum analogen Vorgang zu tun, mit dem einzigen Unterschiede, daß die Voltgeschwindigkeiten der Elektronen um mehrere Zehnerpotenzen auseinanderliegen. Infolge dieser verschiedenen Geschwindigkeiten fällt die Strahlung bei der vorliegenden Erscheinung in den sichtbaren Bereich des Spektrums.

Wesentlich ist bei der Annahme dieses Bildes die Feststellung, ob für die Leuchterscheinung die Einsteinschen

Gleichungen und speziell das Duane-Huntsche Gesetz strenge Gültigkeit besitzen. In letzter Zeit wurden von Lossew¹⁾, der die Leuchterscheinungen an SiC ebenfalls beobachtete, Messungen veröffentlicht, die sich mit dieser Aufgabe befassen. Er stellt für die gelbe Leuchterscheinung die strenge Gültigkeit der Einsteinschen Gleichungen fest. Derartige Messungen sind natürlich wegen der großen Lichtschwachheit der Erscheinung und wegen der starken Intensitätsabnahme nach der kurzwelligen Seite hin mit großen Schwierigkeiten verknüpft, und eine Feststellung der Grenzwellenlänge ist wohl aus diesen Gründen nur annähernd möglich. Auch Lossew kommt auf Grund seiner Spektraluntersuchungen, die immer nur ein kontinuierliches Spektrum zeigten, zu der Überzeugung, daß das gelbe Leuchten eine kontinuierliche weiche Bremsstrahlung darstellt.

Für die Deutung der Leuchterscheinung als eine Elektronenbremsstrahlung ist weiter die Feststellung wesentlich, daß ähnliche Erscheinungen an festen Körpern schon gefunden wurden, die ebenfalls als eine weiche kontinuierliche Röntgenstrahlung gedeutet werden mußten. M. G. Reboul und M. Bodin²⁾ haben eine solche Bremsstrahlung beim Anlegen elektrischer Felder an schlecht leitende Substanzen, z. B. an gewisse Salze beobachtet.

Es sprechen also gegen die Erklärung der vorliegenden Leuchterscheinungen an SiC-Kristallen als eine weiche Bremsstrahlung weder prinzipielle Bedenken, noch ist die Erscheinung völlig neu und fällt aus dem Rahmen bisher gemachter Beobachtungen und Erklärungen heraus.

Eine große Stütze würde diese Deutung der Leuchterscheinung offenbar dann erhalten, wenn sich die beobachteten Erscheinungen, besonders die Intensitätsmaximumverschiebung bei Temperaturänderungen mit ihrer Hilfe erklären ließen. Eine solche Verschiebung kann nach der Theorie nur eintreten, wenn gemäß der Sommerfeldschen Gleichung

$$h\nu = \frac{m}{2} (v_1^2 - v_2^2) \quad ^3)$$

1) O. W. Lossew, *Phil. Mag.* **6**. S. 1024. 1928; *Phys. Ztschr.* **30**. S. 920. 1929.

2) M. G. Reboul und M. Bodin, *Journ. d. Phys.* **3**. S. 20, 342. 1922; **7**. S. 275. 1926.

3) A. Sommerfeld, *Proc. Nat. Acad.* **15**. S. 393. 1929. Über Elektronenbeugung, -Bindung, -Bremsung. (Vortrag, Jena, Okt. 1930.)

die häufigst auftretende Differenz $v_1 - v_2$ bei tiefen Temperaturen größer ist, wenn also v_1 größer und (oder) v_2 kleiner ist. Dabei bedeutet v_1 die Elektronengeschwindigkeit vor, v_2 die nach dem Bremsvorgange. Da die freie Weglänge der Elektronen in Elektronenleitern mit sinkender Temperatur wächst, ist ein solches Anwachsen von v_1 sehr wahrscheinlich.

Die starke Intensitätsmaximumsverschiebung im Spektrum der gelben Leuchterscheinung bei Temperaturänderungen kann also, durch die Verschiebung der beim Bremsvorgang häufigst auftretenden Elektronengeschwindigkeit nach der Seite höherer Geschwindigkeiten hin erklärt werden. Bei niedrigen Temperaturen scheint außerdem die nach dem Bremsvorgang dem Elektron noch verbleibende kinetische Restenergie durchschnittlich kleiner zu sein, als bei hohen Temperaturen, so daß bei niedrigeren Temperaturen eine größere Energieausbeute stattfindet. Die Versuche ergaben fernerhin, daß bei Spannungserhöhungen besonders bei tiefen Temperaturen eine stetige Verschiebung des Spektrums nach höheren Frequenzen stattfindet. So leuchtet unter flüssiger Luft der Kristall bei 2 Volt rot, bei 3 Volt gelb und bei 5 Volt blaugrün. Auch diese Tatsache weist eindeutig auf Existenz einer Bremsstrahlung hin.

Weiterhin ergab sich, daß eine Änderung des äußeren Luftdruckes keinen Einfluß auf die Leuchterscheinungen hat. Dies ist auch bei Elektronenbremsvorgängen im Kristall keinesfalls zu erwarten, da ja der ganze Vorgang innerhalb des Kristalls verläuft. Letztere Tatsache kann direkt unter dem Mikroskop, besonders bei seitlicher Beobachtung des Kristalles, festgestellt werden. Demnach können nur Änderungen des Kristalls selbst, wie z. B. Temperaturänderungen, Abweichungen der Erscheinungen bedingen.

Die Befunde an der gelben Leuchterscheinung legen eine Deutung dieser Erscheinung als einer weichen Elektronenbremsstrahlung nahe. Die Befunde an den blauen Leuchtpunkten sprechen für dieselbe Deutung. Auch diese Erscheinung wird in flüssiger Luft nicht schwächer. Ob eine Intensitätsmaximumsverschiebung bei Temperatur- und Spannungsänderungen vorliegt, kann ohne weiteres, da das Spektrum bis ins ultraviolette Gebiet reicht, nicht entschieden werden. Wegen der experimentellen Schwierigkeiten mißlingen bisher spektrographische

Aufnahmen unter flüssiger Luft. Wäre die Erscheinung ein thermischer Effekt, so müßte aber schon an der Intensität bei der Beobachtung unter flüssiger Luft zumindest eine Abschwächung bemerkbar sein, die jedoch nicht beobachtet wurde.

Da eine Struktur im Spektrum auch unter flüssiger Luft nicht vorhanden ist, kann das Leuchten nicht ohne weiteres als eine Lumineszenzstrahlung im engeren Sinne aufgefaßt werden. Es bleibt also ebenfalls nur eine Erklärung als Bremsstrahlung übrig. Alle die bei der Deutung der Leuchterscheinung an der Kathode angeführten Gründe könnten auch hier wiederholt werden.

Aus alledem geht aber hervor, daß die beiden Effekte im Grunde gar nicht so sehr voneinander verschieden sein können. Sie sind wahrscheinlich auf die gleichen Vorgänge zurückzuführen.

Das Leuchten tritt an der Anode auf. Die Elektronen, die es hervorrufen, haben also ein größeres Potentialgefälle durchlaufen, wenn es sich dabei um Elektronen handelt, die aus der Kontaktspitze austreten, als diejenigen, die die Erscheinung an der Kathode hervorrufen. Aus welchen Gründen im Kristall einzelne Stellen vorhanden sind, an denen die freie Weglänge der Elektronen durchschnittlich größer ist, ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Die Tatsache der großen Frequenz und das punktförmige Auftreten an der Anode deuten darauf hin, daß derartige Bahnen im Kristall tatsächlich vorhanden sind, Bahnen, die es ermöglichen, daß das im Kristall beschleunigte Elektron ohne Zusammenprall fast den ganzen Kristall durchstoßen kann.

Interessant ist die Beobachtung dieser Leuchtpunkte unter dem Mikroskop. Man sieht hier, daß nicht nur an der Oberfläche, sondern auch tief im Innern des Kristalls eine große Anzahl derartiger Leuchtpunkte vorhanden ist. Aus den Versuchen, die in Ausnahmefällen das Leuchten auch schon bei Spannungen unterhalb 10 Volt zeigten, scheint zu folgen, daß auch diese Erscheinung schon bei niederen Spannungen vorhanden ist, dort aber wegen der geringen Intensität der Beobachtung nicht zugänglich ist.

Die Sondenuntersuchungen zeigten, daß aus den Leuchtpunkten Elektrizitätsträger austreten, eine Erklärung hierfür liegt nahe. Die Strahlung reicht bis in das ultraviolette Ge-

biet. Wenn nun über einen derartigen Leuchtpunkt eine Kupfersonde gebracht wird, so werden vermutlich durch die Bestrahlung der Sondenspitzen mit ultravioletttem Licht in dieser Sonde Photoelektronen frei, die durch das zwischen Sonde und Kristall liegende Feld auf den Kristall gelangen. Durch Verlust dieser Photoelektronen muß das Elektrometer sich dann natürlich positiv aufladen. Nun ist aber nachzuweisen, daß bei umgekehrtem Feldverlauf eine negative Aufladung des Elektrometers eintritt. Das besagt offenbar, daß jetzt auf die Sondenspitze Elektronen gelangen. Die Frage nach dem Ursprung dieser Elektronen ist ebenfalls durch den Photoeffekt zu erklären. Im letzteren Falle müßten die Elektronen aus den blauen Leuchtpunkten vermöge der dort vorhandenen starken ultravioletten Strahlung selbst zum Austritt veranlaßt werden und durch das zwischen Sonde und Kristall liegende Feld auf die Sondenspitze befördert werden. Das Fehlen dieser Erscheinung bei der Strahlung an der Kathode erklärt sich aus der geringeren Frequenz dieser Strahlung.

Es soll zum Schlusse der Arbeit noch einmal kurz das Ausgangsproblem, der Gleichrichtereffekt, besprochen werden. Die Tatsache, daß die gleichgerichtete Stromkomponente dann besonders stark auftritt, wenn die Leuchterscheinung an der Kathode stark ausgeprägt vorhanden ist, deutet darauf hin, daß der Gleichrichtereffekt ebenfalls im ursächlichen Zusammenhang mit der Leuchterscheinung steht. Es wurde oben beschrieben, daß die Leuchterscheinung an der Kathode bei kleiner Kontaktfläche besonders stark ist. Dasselbe wurde betreffs des Gleichrichtereffekts festgestellt. Auch diese Tatsache deutet auf einen ursächlichen Zusammenhang beider Effekte hin. Die ausgeprägte Existenz der Leuchterscheinung bedeutet offenbar, daß die oben beschriebenen Elektronenvorgänge im Kristall mit besonderer Häufigkeit stattfinden. Ob hiermit der kausale Zusammenhang beider Erscheinungen gegeben ist, kann nicht entschieden werden. Gelöst ist damit das Gleichrichterproblem natürlich noch nicht, denn die Fragestellung hat sich nur geändert. Sie lautet jetzt: Weshalb tritt die Leuchterscheinung an der Kathode besonders ausgeprägt dann auf, wenn die Kontaktfläche klein ist. Ob die Bahnen besonderer Leitfähigkeit, die experimentell

nachgewiesen wurden, hierbei mitwirkend sind, ist nicht klar ersichtlich. Sicher besteht bei großer Kontaktfläche eine größere Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Elektrode Endpunkte dieser Leitbahnen berührt, als bei kleinen Kontaktflächen. Die obige Feststellung, daß die Leuchterscheinung nicht zu beobachten ist, wenn als Elektrodenkontakt eine solche Stelle hoher Leitfähigkeit benutzt wird, legt die Vermutung nahe, daß diese Leitbahnen bei all diesen Fragen vielleicht von ausschlaggebender Bedeutung sind. Möglicherweise kann man sich durch folgendes etwas schematisches Bild die Vorgänge erklären.

Die Bahnen besonders guter Leitfähigkeit münden zum größten Teil in die Einschmelzmasse, wenn diese den Kristall mit großer Fläche berührt, gelangen aber nur zum geringen Teil in unmittelbare Nähe der Kontaktspitze. Den in weitem Umkreis um den Berührungspunkt der negativen Kontaktspitze im Bereich der gelben Leuchterscheinung durch Elektronenstoß freigewordenen Ladungsträgern steht also eine große Anzahl derartiger, sozusagen parallelgeschalteter Stromleitungen zur Verfügung, umgekehrt sind für die Elektrizitätsträger, die, wenn die Einschmelzmasse negativ ist, zur Kontaktspitze fließen, nur wenige dieser guten Stromleiter vorhanden. Denn nur wenige dieser festgestellten Leitbahnen führen in unmittelbare Nähe der Kontaktspitze. Es muß also einmal, wenn die Kontaktspitze negativ ist, der Widerstand im Kristall geringer sein, als dann, wenn die Einschmelzmasse Kathode ist.

Vielfach wurde gefunden, daß metallische Verunreinigungen des Kristalls den Gleichrichtereffekt fordern. Diese Tatsache würde im guten Einklang mit der beschriebenen Erklärung stehen, denn bis zu einem gewissen Grade würden derartige Verunreinigungen die Herausbildung bevorzugter Leitbahnen begünstigen.

Schwierigkeiten hat von jeher die Erklärung des Richtungswechsels der gleichgerichteten Stromkomponente gemacht. Wie schon erwähnt, wurden bei den vorliegenden Untersuchungen auch einige Male derartige Richtungswechsel beobachtet. Dabei stellte sich dann bei SiC immer heraus, daß sich der Kristall in der Einschmelzmasse gelockert hatte, also zwischen Einschmelzmasse und Kristall ein Wackelkontakt vorhanden

war. Das bedeutet aber, daß der Kristall und die Einschmelzmasse wegen ihrer Unebenheiten sich nur an wenigen Stellen berühren. Befindet sich nun zu gleicher Zeit auf der anderen Seite des Kristalls eine etwas stumpfe Kontaktspitze und berührt diese Spitze den Kristall an der Mündungsstelle einer Bahn hoher Leitfähigkeit, so können unter diesen Umständen Kontaktspitze und Einschmelzmasse ihre Funktionen gerade vertauschen. Bei SiC wurden derartige Beobachtungen, wie gesagt, selten gemacht und fast immer war ein derartiger Wackelkontakt zwischen Einschmelzmasse und Kristall dabei festzustellen. In einem Falle wurde dieser Wackelkontakt durch Erwärmung der Einschmelzmasse, die aus Woodmetall bestand, beseitigt, während alles andere, besonders die Kontaktspitze, unverändert blieb. Dabei trat eine Richtungsänderung des Gleichrichtereffektes ein, so daß jetzt wieder ein wenn auch geringer gleichgerichteter Strom in der gewöhnlichen Richtung von der Spitze zur Einschmelzstelle durch den Kristall floß.

Die Erscheinungen am SiC-Kristall sind so vielgestaltig, daß man sich bisher lediglich ein ungefähres Bild von dem Zustandekommen der Vorgänge entwerfen kann. Besonders auch in bezug auf den Gleichrichtereffekt ist noch vieles zu klären. Eine widerspruchsfreie, mathematische Formulierung der Vorgänge, die beim Gleichrichtereffekt mitwirken, ist auf Grund der vorliegenden Ergebnisse sehr schwer möglich und es erscheint auch fraglich, ob die Erklärung des Gleichrichtereffektes durch eine einzige Theorie möglich ist. Treten doch schon bei der Untersuchung des Effektes an einem bestimmten Kristall, z. B. an SiC, sehr unterschiedliche Erscheinungen zutage, die sich nicht alle in einem Bilde vereinigen lassen, sondern zu deren Erklärung mehrere Annahmen gemacht werden müssen. Noch bedeutend uneinheitlicher muß dann natürlich eine Erklärung ausfallen, die allen Erscheinungen bei den verschiedensten Detektormaterialien gerecht werden soll. Eng verknüpft erscheint das Problem jedenfalls mit dem der Kristalleitfähigkeit überhaupt, mit dem des Elektronenaustritts aus festen Körpern unter Wirkung hoher elektrischer Felder, und die Leuchterscheinungen mit ihren Beziehungen zur Stromspannungscharakteristik bei SiC deuten auch auf

Beziehungen hin, die zwischen dem Gleichrichtereffekt und den diese Erscheinung hervorruhenden elektrischen Vorgängen bestehen. Vielleicht trägt die weitere Klärung dieser Leuchterscheinungen dazu bei, auch der Theorie der gerichteten Kristalleitfähigkeit festere Umrisse zu verleihen.

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. G. Hoffmann, spreche ich meinen herzlichen Dank aus für die Anregung zu dieser Arbeit, für seine stete Teilnahme an ihrem Fortgange und für zahlreiche Anregungen, die er mir bei ihrer Durchführung zuteil werden ließ.

Desgleichen danke ich Herrn Professor Dr. A. Smekal für sein wohlwollendes Interesse und für mannigfache Ratschläge.

Zusammenfassung

Die Gleichrichterwirkung von SiC wird in Abhängigkeit vom Kontaktspitzenndruck untersucht, dabei wird bei einem bestimmten Drucke ein starker Stromanstieg um mehrere Zehnerpotenzen festgestellt.

Untersuchungen mit abgeätzten SiC-Kristallen ergeben das Vorhandensein einer Kieselsäurehaut.

An SiC-Kristallen werden Leuchterscheinungen beobachtet und untersucht. Es treten zweierlei Leuchterscheinungen auf, eine gelbe flächenhafte, die vorzugsweise an der negativen Elektrode entsteht, und eine blaue punktförmige, die sich in weitem Umkreis um die positive Stromzuführung erstreckt. Die erstere erscheint in der Regel bei einer Spannung von etwa 4 Volt, die letztere bei etwa 12 Volt.

Die Spektren beider Leuchterscheinungen sind strukturlös. Das der flächenhaften reicht bei Zimmertemperatur und bei seinem Eintritt bis ins grüne Gebiet. Das Spektrum der punktförmigen reicht bei seinem Eintritt bis ins ultraviolette.

Die Leuchterscheinung an der Kathode erweist sich in hohem Maße temperaturabhängig. Bei Untersuchungen unter flüssiger Luft tritt eine Verschiebung des Intensitätsmaximums um etwa 2000 Å-Einheiten nach der violetten Seite des Spektrums hin auf, so daß hier das Leuchten blaugrün erscheint, desgl. wird die Strahlung intensiver. Auf die blaue punktförmige

Leuchterscheinung hat eine Temperaturerniedrigung keinen Einfluß.

Bei tiefen Temperaturen ist eine Verschiebung des gesamten Spektrums der gelben Leuchterscheinung mit wachsender Spannung nach der kurzwelligen Seite hin festzustellen.

Die Leuchterscheinungen werden im Vakuum untersucht, dabei sind sowohl an ihren äußeren Erscheinungsformen als auch an den Spektren keine Veränderungen zu bemerken.

Es ergeben sich Beziehungen zwischen der Stromspannungscharakteristik und den beiden Leuchterscheinungen, und zwar weist das Kurvenbild der Charakteristik bei besonders ausgeprägtem Auftreten der Leuchterscheinungen zwei Krümmungsstellen auf.

Bei den Temperaturabhängigkeitsuntersuchungen der Stromspannungskurve ergibt sich mit abnehmender Temperatur ein Sinken des Stromes und die Annäherung der Kurve an eine Gerade. Die Krümmungsstellen sind bei der Temperatur der flüssigen Luft verschwunden. Desgleichen ist der Gleichrichtereffekt nur noch andeutungsweise vorhanden.

Die Leuchterscheinungen werden mittels elektrostatischer Sonden untersucht. Dabei wird festgestellt, daß aus den blauen Leuchtpunkten Elektronen austreten.

Mittels feiner Kontaktspitzen werden die Oberflächen von SiC-Kristallen in bezug auf ihre elektrische Leitfähigkeit untersucht. Dabei ergibt sich, daß auf der Oberfläche der Kristalle Punkte besonders hoher Leitfähigkeit existieren.

Die Leuchterscheinungen werden als Elektronenbremsstrahlung gedeutet, da sich alle Versuchsergebnisse mittels dieser Annahme erklären lassen.

Beziehungen zwischen den Leuchterscheinungen und dem Gleichrichtereffekt werden erläutert.

(Eingegangen 17. Juli 1931)

Auslösung von Sekundärelektronen durch Wasserstoffkanalstrahlen in Metallen

Von Gerhard Schneider

(Mit 14 Figuren)

I. Einleitung

Die Erscheinungen beim Durchgang von Kanalstrahlen durch Materie sind in neuester Zeit durch Arbeiten über Ionisation, Reichweite, Umladungen, Geschwindigkeitsverluste und Streuung von Kanalstrahlen in ihrer Natur und Gesetzmäßigkeit richtig erfaßt worden und ermöglichten wertvolle Schlüsse auf den Einzelprozeß des Kanalstrahlenstoßes. In einem wesentlichen Punkt bedurfte dieses Problem jedoch noch eingehender Untersuchung: Es waren noch keine experimentellen Erfahrungen darüber vorhanden, welche Energien beim Kanalstrahlenstoß auf die Sekundärelektronen übertragen werden können. Denn die bisher veröffentlichten Angaben über die Geschwindigkeitsverteilung solcher durch Wasserstoffkanalstrahlen ausgelöster Sekundärelektronen von Füchtbauer¹⁾ und Baerwald²⁾ stützten sich nur auf die Beobachtung von Elektronen, die beim Aufprall von Kanalstrahlen auf massive Metallplatten an deren Vorderseite austraten. Einfache stoßtheoretische Überlegungen lassen aber erwarten, daß überhaupt keine Sekundärelektronen beim Stoß von der Kanalstrahlenrichtung um mehr als 90° abgelenkt werden. Beobachtet man größere Winkel, so muß es sich um mehrfache Streuung der Sekundärelektronen handeln. Die Stoßmechanik verlangt ferner, daß die Sekundärelektronen mit den höchsten Geschwindigkeiten in Stoßrichtung der Kanalstrahlen

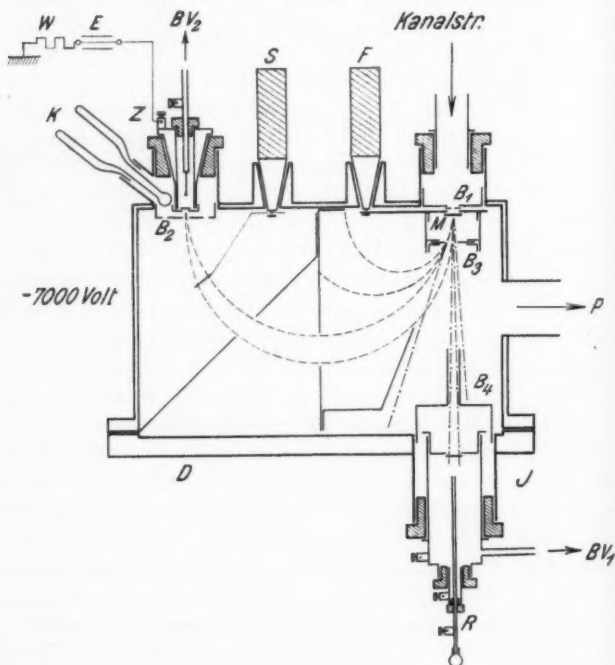
1) Ch. Füchtbauer, Phys. Ztschr. 7. S. 153. 1906.

2) H. Baerwald, Ann. d. Phys. 41. S. 643. 1913.

weiterfliegen. Es wurde deshalb in dieser Arbeit versucht, gerade die Sekundärelektronen zu erfassen, die in Stoßrichtung der Kanalstrahlen, also annähernd senkrecht aus dünnen Metallfolien austraten.

2. Meßkammer (Fig. 1)

Die Kanalstrahlen bestimmter Geschwindigkeit traten durch eine Aluminiumblende B_1 von 0,3 mm Durchmesser in



Meßkammer

Fig. 1

die Meßkammer ein und trafen auf die Metallfolie M , die durch einen Schliff F in den Strahlengang der Kanalstrahlen gedreht werden konnte. Der Folienhalter war als Träger für zwei Metallfolien ausgebildet. Die in der Stoßrichtung der Kanalstrahlen austretenden Sekundärelektronen wurden je nach

Geschwindigkeit durch ein entsprechendes Magnetfeld zwischen zwei Helmholtz-Gaugainspulen auf einem Halbkreis von 50 mm Radius abgelenkt und gelangten durch die Blendenöffnung B_2 von 1,5 mm Durchmesser in ein Beschleunigungsfeld. Das Beschleunigungsfeld entstand dadurch, daß die ganze Meßkammer auf - 7000 Volt aufgeladen wurde, im Innern der Kammer also ein feldfreier Raum war, während das Gehäuse des Geigerschen Spitzenzählers Z über das Fadenelektrometer E und einen hohen Widerstand W an Erde lag. Die auf 7000 Volt beschleunigten Sekundärelektronen traten durch die Zähleröffnung von 1 mm Durchmesser in den Spitzenzähler ein und wurden durch Ausschläge des Elektrometerfadens angezeigt. Gleichzeitig wurden sie durch ein elektromagnetisches Zählwerk registriert, das direkt auf die mit einem Dreiröhrenverstärker vergrößerten Stromstöße ansprach. Mit dem Schliff S konnte eine Blende so in den Elektronenstrahlengang gebracht werden, daß sie gerade das ganze Strahlenbündel abblendete. Auf diese Weise konnte festgestellt werden, ob die Messungen nicht durch einen infolge schlechten Vakuums entstandenen Ioneneffekt oder gestreute Teilchen gefälscht waren. Tatsächlich gelangten bei vorgedrehter Blende keine Teilchen mehr in den Zähler.

Die Aluminiumblende B_3 war so an dem Folienhalter angebracht, daß der durch das gesamte Blendensystem definierte Elektronenstrahlengang nicht gestört wurde, andererseits aber möglichst wenig gestreute Kanalstrahlen in die Kammer gelangen konnten. Die mittlere, nicht besonders bezeichnete Blende, durch die die Meßkammer in zwei gleiche Hälften geteilt wurde, bestimmte mit ihrer rechteckigen Öffnung (Länge in der Bildebene liegend 10 mm, Breite 5 mm) die Größe des erfaßten Elektronenbündels. Sie war verbunden mit zwei weiteren Blenden, von denen die rechts angebrachte schräg in die Kammer ragte und die am Deckel D reflektierten Kanalstrahlen sowie dort ausgelöste Sekundärelektronen nicht in die linke Kammerhälfte gelangen ließ, während die linke Blende diagonal die linke Kammerhälfte durchschnitt und einen weiteren Schutz gegen falsche Teilchen bildete.

Die Blende B_4 verhinderte die Ausbildung eines störenden Feldes zwischen Meßkammer und Ionisationskammer I . Mit der Ionisationskammer, die eine Öffnung von 2,5 mm

hatte, wurde während der Messungen die Menge der durch die Metallfolie annähernd senkrecht durchtretenden Kanalstrahlen dosiert und außerdem bei weggedrehter Folie die Primärintensität der Kanalstrahlen gemessen. Ionisationskammer wie Spitzenzähler waren in üblicher Weise gegen das Hochvakuum durch dünne Zelluloidhäutchen abgeschlossen. Der Deckel *D*, der die Ionisationskammer trug, war auf die Meßkammer aufgeschliffen und verschloß sie hochvakuumdicht. Er konnte zum Einsetzen der Folien abgenommen werden. Um eine leichte Justierung der Ionisationskammer beim Aufsetzen des Deckels zu ermöglichen, war in der Mitte der Ionisationskammer statt eines Drahtes ein dünnes Kupferröhrchen eingesetzt, das hinten durch eine Glaskugel verschlossen war. Da außerdem ein Fenster in der Auflösungskammer *M* (Fig. 2) es erlaubte, in Richtung der Kanalstrahlen zu blicken, konnten Ionisationskammer und Metallfolien optisch justiert werden. Bei *P* war eine Quecksilberdiffusionspumpe angeschlossen, bei *BV*₁ und *BV*₂ je ein Ballastvakuum. Die Kühlsonde *K* gestattete die Kühlung mit flüssiger Luft unmittelbar im Beschleunigungsfeld. Da die Meßkammer negativ aufgeladen werden mußte, war sie isoliert aufgestellt.

3. Erzeugung der Kanalstrahlen (Fig. 2)

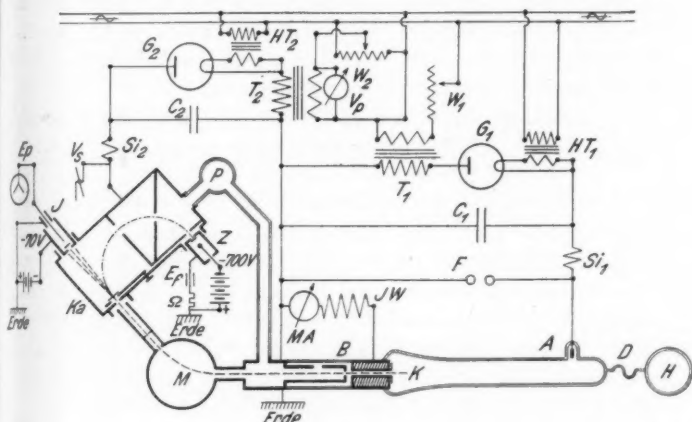
Zur Erzeugung der Kanalstrahlen fand die Wiensche Durchströmungsmethode mit nachträglicher Beschleunigung der Kanalstrahlen in der von Gerthsen ausgebildeten Form Verwendung. Die Anordnung, über die nähere Einzelheiten aus den Angaben von Gerthsen¹⁾ ersichtlich sind, ist in Fig. 2 schematisch dargestellt.

Aus dem Wasserstoffvorratsgefäß *H* strömte Wasserstoff durch die Kapillare *D* langsam in das Entladungsrohr. Gleichzeitig saugte die Quecksilberpumpe *P* durch eine Kapillare im Kathodenkörper *K* Wasserstoff aus dem Entladungsrohr ab. Durch geeignete Wahl des Druckes im Vorratsgefäß konnte der Druck im Entladungsrohr auf etwa $5 \cdot 10^{-2}$ mm konstant gehalten werden, während im Beschleunigungsraum *B*

1) Chr. Gerthsen, Ann. d. Phys. 85. S. 881. 1928.

durch
Kanal-
die die
ammer
Hoch-
Der
Meß-
ndicht.
werden.
n Auf-
r Ioni-
archen
n war.
(Fig. 2)
onnten
werden.
n, bei
K ge-
n Be-
laden

ein Druck von nur 1.10^{-5} mm das Anlegen einer Potentialdifferenz von mehr als 40 kV zwischen Kathode und Beschleunigungsrohr möglich machte.



Schaltskizze

Fig. 2

Erklärung zur Hochspannungsanlage

V_p Voltmeter	V_s Statisches Voltmeter
T_1, T_2 Hochspannungstransformatoren	W_1, W_2 Schiebewiderstände
G_1, G_2 Gleichrichterröhren	HT_1, HT_2 Heiztransformatoren
Si_1, Si_2 u. IW Amylalkohol-Cadmiumjodid-Widerstände	C_1, C_2 Kondensatoren
	F Funkenstrecke
	MA Milliampereometer

4. Geschwindigkeitsmessung der Kanalstrahlen und Auflösungsmoment

Die Voltgeschwindigkeit der Kanalstrahlen wurde durch magnetische Auflösung nach dem folgenden von Gerthsen¹⁾ mitgeteilten Verfahren bestimmt. Die Kanalstrahlen änderten in dem Magnetfeld M (Fig. 2), das einen Durchmesser von 80 mm hatte, ihre Richtung und gelangten bei einer dem Magnetfeld entsprechenden Geschwindigkeit nach Ablenkung um 45° durch ein enges Blendsystem in die Meßkammer Ka (Fig. 2). Mit der Ionisationskammer I wurden bei bestimmter

1) Chr. Gerthsen, Ann. d. Phys. [5] 3. S. 399. 1929.

am Entladungsrohr liegender Spannung durch Variation des Magnetisierungsstroms die schnellsten vorhandenen Kanalstrahlen festgestellt. Ihre Voltgeschwindigkeit entsprach dann der höchstmöglichen Beschleunigung, also der mit der Funkenstrecke F gemessenen Potentialdifferenz zwischen Anode A und Erde. Die Methode, mit der die Richtigkeit dieser Annahme erwiesen wurde, sei hier angegeben.

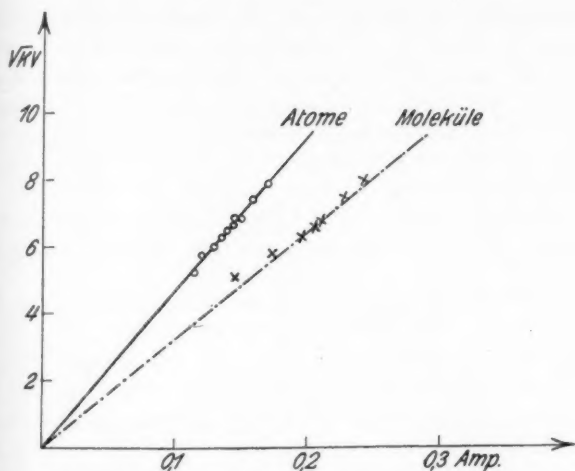
Bekanntlich gilt unter Benützung der üblichen Bezeichnungsweise $H = \frac{m \cdot v}{e \cdot r}$. Die Feldstärke H ist also proportional der Geschwindigkeit v . Da ferner $\frac{m}{2} \cdot v^2 = e \cdot V$ ist, muß die Feldstärke H auch proportional der Quadratwurzel aus der Voltgeschwindigkeit V sein. Eine Ausmessung des Magnetfeldes mit Induktionsspule und ballistischem Galvanometer ergab bei 3 mm Polabstand weit über den verwandten Bereich hinaus Proportionalität zwischen Feldstärke und Magnetisierungsstrom. Es ist also die Wurzel aus der Voltgeschwindigkeit direkt proportional dem Magnetisierungsstrom.

Wie aus Fig. 3 hervorgeht, ist in Übereinstimmung mit der Theorie die Quadratwurzel aus der Voltgeschwindigkeit eine lineare Funktion des Magnetisierungsstroms, die durch den Nullpunkt geht. Da außerdem dieselben Meßpunkte bei zwei verschiedenen Drucken im Entladungsrohr festgestellt wurden, scheint es außer Zweifel, daß die schnellsten vorhandenen Kanalstrahlen tatsächlich jeweils die ganze zwischen Anode und Erde liegende Potentialdifferenz durchlaufen haben.

Bei Proportionalität zwischen Feldstärke und Magnetisierungsstrom müssen sich für Atome und Moleküle, die von demselben Feld beschleunigt worden sind, die Magnetisierungsströme verhalten wie $1:\sqrt{2}$. Auch diese Forderung ist, wie aus Fig. 3 hervorgeht, erfüllt.

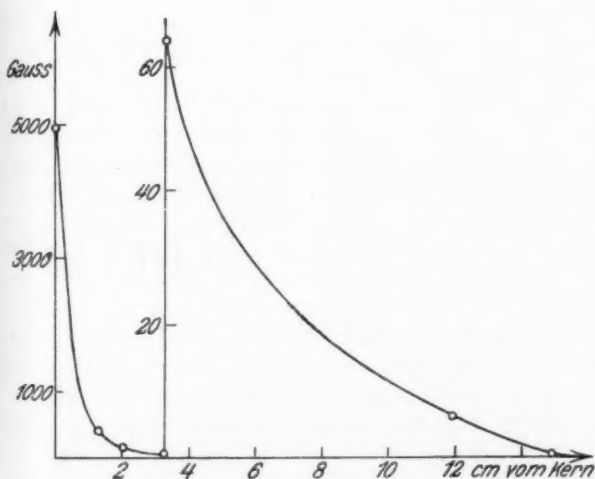
Der Auflösungsmagnet, der in der Werkstatt des hiesigen Instituts angefertigt worden war, bestand aus einem U-förmigen Gußstück aus Kruppschem Dynamostahl, dessen Schenkel je eine Bohrung von 80 mm Durchmesser hatten. In die Bohrungen konnten zwei Eisenkerne eingesetzt und auf diese die Spulen aufgeschoben werden.

Der Magnet zeichnete sich besonders durch ein sehr kleines Streufeld aus. Dies zeigt Fig. 4. Bei einem Abstand



Geschwindigkeitseichung des Auflösungs magneten

Fig. 3



Streifeld des Auflösungs magneten

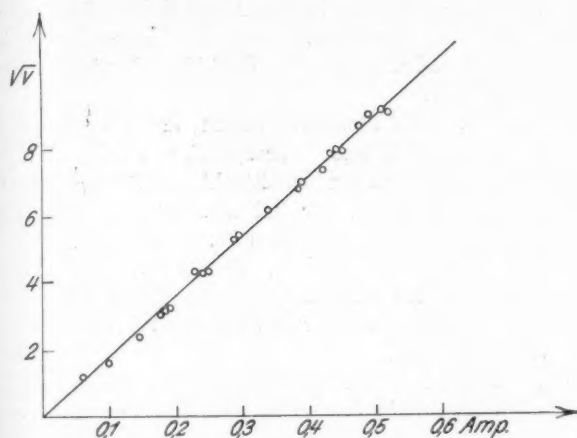
Fig. 4

der beiden Kerne von 3 mm und günstiger Spulenstellung war das Streufeld in einer Entfernung von 16 cm parallel zum Hauptfeld kleiner als 0,3 Gauss, während zwischen den Polen ein Feld von 5000 Gauss herrschte. Dieser Umstand war deshalb von Bedeutung, weil bei der geringen Geschwindigkeit der Sekundärelektronen schon ein verhältnismäßig kleines Streufeld genügt hätte, um ihre Bahn in der Meßkammer zu beeinträchtigen. Eine solche Einwirkung auf die 26 cm vom Magneten entfernte Meßkammer war also ausgeschlossen.

5. Geschwindigkeitsmessung der Sekundärelektronen und Helmholtz-Gaugainspulen

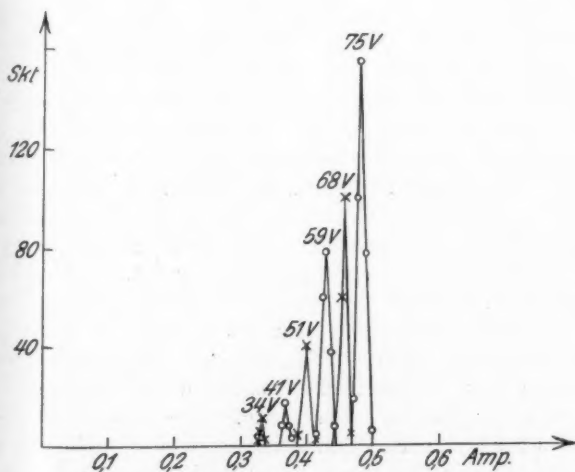
Zur Geschwindigkeitsmessung der Sekundärelektronen wurde die fokussierende Methode benützt, die gegenüber der älteren Bremsfeldmethode den Vorzug hat, daß eine Trennung von Kanalstrahlen und Sekundärelektronen und dadurch ein Zählen des reinen Elektroneneffektes mit dem Geigerschen Spitzenzähler möglich ist. Die Bedingungen für sauberes Arbeiten waren bei dem ziemlich großen Krümmungsradius der Elektronenbahn von 50 mm und den entsprechend großen Meßkammerdimensionen besonders günstig, da alle störenden Teilchen durch geeignete Blendenanordnung vom Spitzenzähler ferngehalten werden konnten.

Die Helmholtz-Gaugainspulen, zwischen denen die zur Ablenkung nötigen schwachen Magnetfelder erzeugt wurden, waren zusammen mit der Meßkammer so aufgestellt, daß ihr Feld in gleicher Richtung mit dem Erdfeld verlief. Sie hatten einen Abstand von 15 cm und dementsprechend einen Durchmesser von 30 cm und bestanden je aus 210 Windungen Kupferdraht. Der zwischen den Spulen gemessene Raum mit konstanter Feldstärke war annähernd ein in der Kraftlinienrichtung liegender Zylinder von 12 cm Länge und 6 cm Durchmesser. Um eine ganz einwandfreie Geschwindigkeitsmessung zu erhalten, wurde zunächst unmittelbar vor die Blende B_1 (Fig. 1) der Meßkammer ein Wolframdraht gesetzt, dessen Glühelektronen zwischen Draht und Blende verschieden starke Beschleunigung erhielten. Mit Spitzenzähler oder Auffänger wurde dann jeweils der zur richtigen Ablenkung nötige Magnetisierungsstrom festgestellt. Es ergab sich wiederum,



Geschwindigkeitseichung der Helmholtz-Gaugainspulen

Fig. 5



Geschwindigkeitsdefinition gleich schneller Elektronen

Fig. 6

wie zu verlangen war, eine lineare Abhängigkeit des Magnetisierungsstroms von der Wurzel aus der Voltgeschwindigkeit, die unter Berücksichtigung des Erdfeldes durch den Nullpunkt ging (Fig. 5).

Hierbei sei noch besonders betont, daß die Eichung bis herab zu 1,5 Voltelektronen durchgeführt wurde. Während der Messungen durchfloß den Kanalstrahlenauflösungs-Magneten ein Magnetisierungsstrom, der bei den späteren endgültigen Messungen nie überschritten worden ist. Da auch die Blendenverhältnisse unverändert blieben, scheint es ausgeschlossen, daß die im folgenden mitgeteilten Messungen durch störende magnetische Beeinflussung der Bahnen ganz langsamer Elektronen verfälscht sind.

Fig. 6 zeigt die Form der Maxima für verschiedene Voltgeschwindigkeiten. Die Ausschläge des Paschenelektrometers bei Käfigmessung sind als Funktion der Magnetisierungsströme aufgetragen. An sich müßte man für Elektronen gleicher Beschleunigung eine scharf definierte Zacke erwarten; die Verbreiterung der Zacken wurde jedoch etwas größer gemessen, als den rein geometrischen Verhältnissen entsprechen würde. Dies erklärt sich daraus, daß einzelne Elektronen an den Blendenrändern gestreut wurden und dabei Richtungsänderung oder Geschwindigkeitsverluste erlitten haben. Nach der Seite der höheren Geschwindigkeiten zeigen die Kurven steileren Abfall, eine der fokussierenden Methode eigentümliche Erscheinung, wie aus den Darstellungen bei Eckardt¹⁾ nach Wooster²⁾ hervorgeht. Gleichzeitig ist aus den dortigen Angaben ersichtlich, daß bei den in Abschnitt 2 beschriebenen Blendenöffnungen das gesamte aufgewinkelte Elektronenbündel trotz der leichten Verbreiterung nach der Fokussierung noch in den Zähler gelangte. Da später nur größenordnungsmäßige quantitative Angaben über Elektronen von 80 und mehr Volt Geschwindigkeit gemacht werden, erübrigt sich eine besondere Korrektur der Teilchenzahl hinsichtlich der kleinen Verbreiterung der Maxima nach unten. Die Geschwindigkeitsdefinition bei bestimmtem Magnetisierungsstrom ergibt sich aus den geometrischen Verhältnissen der Meßkammer zu ± 2 Proz.

1) A. Eckardt, *Ann. d. Phys.* 5. S. 413. 1913.

2) W. A. Wooster, *Proc. Roy. Soc.* 114. S. 266. 1927.

ring
2,5
fenst
eine
bei
absol
- 7
und
Pasch
Meß
geär
BV
schw

Har
bei
wäh
bis
hoch
Vor
mag
Kon
in
war
über

spor
um
Teil
nich
Fra
daß
digl
im

6. Ionisationskammer (Figg. 1 und 2)

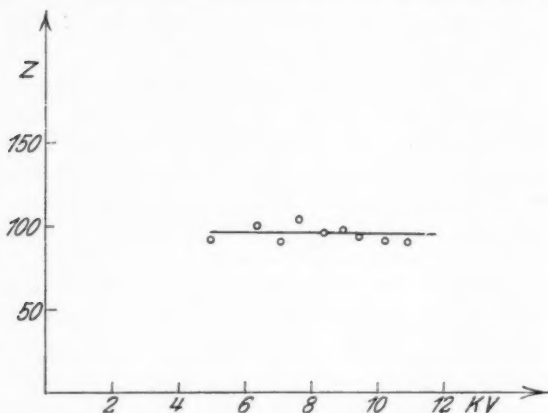
Die Ionisationskammer *I* wurde durch einen Hartgummiring gegen den Deckel *D* isoliert und besaß eine Öffnung von 2,5 mm Durchmesser mit einem etwa 80 m μ dicken Zelluloidfenster. Sie hatte einen Innendurchmesser von 1,8 cm und eine Länge von 6,8 cm, so daß die eindringenden Kanalstrahlen bei einem Druck von 15 mm Hg in der Kammer vollständig absorbiert wurden. Am Gehäuse lag eine Spannung von - 70 Volt gegen Erde. Die Elektrode *R* war durch Erdschutz und Bernsteinisolierung vom Gehäuse getrennt und mit einem Paschelektrometer mit Lichtzeigerablesung verbunden. Der Meßbereich konnte durch Zuschaltung einer Kapazität beliebig geändert werden. Das Ballastvakuum *BV*₁ diente, wie auch *BV*₂ beim Spitzenzähler, zum Ausgleich kleiner Druckschwankungen.

7. Spitzenzähler (Figg. 1 und 2)

Der Geigersche Spitzenzähler *Z* war durch einen Metall-Hartgummischliff in die Meßkammer isoliert eingesetzt und bei den Messungen mit Wasserstoff von 80 mm Hg gefüllt, während an seiner Spitze eine negative Spannung von - 600 bis - 700 Volt gegen Erde lag. Das Gehäuse war über einen hohen Widerstand *W* von etwa 10¹⁰ Ω mit Erde verbunden. Vor dem Widerstand war ein Dreiröhrenverstärker mit elektromagnetischem Zählwerk angeschlossen und gleichzeitig zur Kontrolle ein Fadenelektrometer *E* zugeschaltet. Die Öffnung in der Stirnwand hatte einen Durchmesser von 1 mm und war von einem etwa 150—200 m μ dicken Zelluloidhäutchen überdeckt.

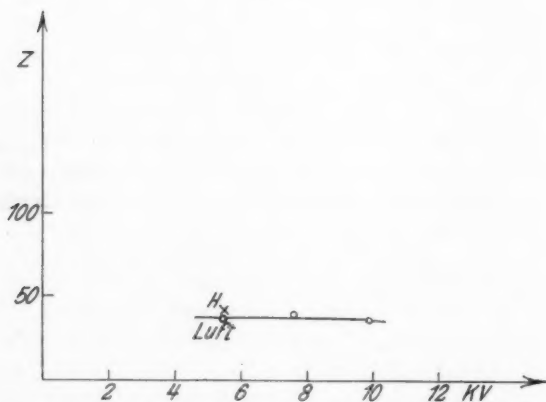
Der Zähler zeigte in 5—10 Minuten im Mittel nur ein spontanes Teilchen. Seine Spitzenspannung konnte maximal um 20 Volt variiert werden, ohne daß sich die gemessene Teilchenzahl änderte. Dies waren unbedingt notwendige, aber nicht ausreichende Bedingungen für quantitatives Zählen. Die Frage der Ökonomie des Zählers wurde dadurch untersucht, daß bei konstanter Sekundärelektronenintensität die Geschwindigkeit in dem Beschleunigungsfeld unmittelbar vor dem Zähler im Bereich von 4,5 kV bis 11 kV variiert wurde.

Fig. 7 zeigt, daß in dem untersuchten Bereich von 4,5 kV bis 11 kV Beschleunigungsspannung die als Ordinate aufgetragene Teilchenzahl Z konstant blieb. Auch in Luft wurde,



Beobachtete Teilchenzahl bei verschiedener Beschleunigungsspannung mit Wasserstofffüllung des Spitzenzählers

Fig. 7



Beobachtete Teilchenzahl bei verschiedener Beschleunigungsspannung mit Luftfüllung des Spitzenzählers

Fig. 8

wie a
die el

I
G. P.
von M
Aceto
aufgef
die un
dageg
eine A
Folien
folien
Gute
konnt
angab
gehen
ausset
Absor

16 ei
43 F
in die

T
strahl
5. 10
Über
nigun
die S
Abble
die B
Magn
Außer
Oberf

1
2
An

wie aus Fig. 8 hervorgeht, dieselbe Teilchenzahl gemessen, die ebenfalls in dem untersuchten Bereich konstant blieb.

8. Metallfolien

Die Herstellung der Metallfolien geschah nach dem von G. P. Thompson¹⁾ beschriebenen Verfahren durch Aufdampfen von Metall auf ein Zelluloseacetathäutchen und Ablösen in Aceton. Da der Folienträger, mit dem die Metallhäutchen aufgefangen wurden, eine Öffnung von 1 mm Durchmesser hatte, die unmittelbar davor liegende Kanalstrahlenblende B_1 (Fig. 1) dagegen nur eine solche von 0,3 mm Durchmesser besaß, war eine Auslösung von Sekundärelektronen an den Rändern der Folienträgerbohrung nicht zu befürchten. Es gelang, Metallfolien von weniger als $10\text{ }\mu$ Dicke freitragend herzustellen. Gute Homogenität, die für die Messung von Bedeutung war, konnte jedoch erst von $20\text{ }\mu$ ab erreicht werden. Die Dickenangaben stützen sich auf Photometrierung der Folien im durchgehenden Licht, wobei allerdings die nicht erwiesene Voraussetzung gemacht wurde, daß die bekannten optischen Absorptionskoeffizienten auch für extrem kleine Dicken gelten.

Für die in dieser Arbeit mitgeteilten Messungen wurden 16 einwandfreie Folien von gewünschter Dicke aus insgesamt 43 Folien ausgewählt. Die Folien wurden vor dem Einsetzen in die Meßkammer genau auf Lochfreiheit geprüft.

9. Vakuumverhältnisse

Trotz eines Druckes von etwa $5 \cdot 10^{-2}$ mm Hg im Kanalstrahlenrohr herrschte in der Meßkammer ein Druck von nur $5 \cdot 10^{-6}$ mm Hg, der mit einem Mc.Leod gemessen werden konnte. Über der Quecksilberstahlpumpe und im Elektronenbeschleunigungsfeld wurde mit flüssiger Luft gekühlt. Beweisend für die Sauberkeit der Verhältnisse war der Umstand, daß bei Ablendung des geometrisch definierten Elektronenbündels durch die Blende S (Fig. 1) oder bei Kommutierung des ablenkenden Magnetfeldes keine Teilchen mehr in den Zähler gelangten. Außerdem konnte infolge des einwandfreien Vakuums und reinster Oberflächen der von Hornbostel²⁾ erwähnte Störeffekt im

1) G. P. Thompson, Proc. Roy. Soc. 125. S. 352. 1929.

2) J. Hornbostel, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 991. 1930.

Beschleunigungsfeld bis zu einer Beschleunigungsspannung von 9000 Volt vermieden werden.

10. Gang der Messungen

Der Gang der Messungen war folgender: Zunächst wurde bei weggedrehter Metallfolie mit der Ionisationskammer durch mehrere Elektrometerablesungen die Primärintensität der Kanalstrahlen festgestellt. Nachdem dann die Metallfolie in den Strahlengang der Kanalstrahlen gebracht worden war, wurden die senkrecht aus ihr austretenden Sekundärelektronen durch Variation des Magnetisierungsstroms in das Beschleunigungsfeld und damit in den Spitzenzähler abgelenkt. Das Zählwerk registrierte die Elektronenzahl, während durch die Ionisationskammer die Konstanz der Kanalstrahlenintensität kontrolliert wurde. Durch geeignete Reduktion wurden alle Meßergebnisse für gleiche auftreffende Kanalstrahlenmenge umgerechnet.

Um die Metallfolie zu entgasen, wurden die Kanalstrahlen einige Zeit lang durch sie hindurchgeschickt, ehe mit den Messungen begonnen wurde. Die Durchströmungsmethode arbeitete so gut, daß die Kanalstrahlenprimärintensität länger als 4 Std. annähernd konstant gehalten werden konnte.

11. Ergebnisse

Der Stoßvorgang, um den es sich bei der Auslösung von Sekundärelektronen durch Korpuskularstrahlen handelt, kann durch eine elementare, auf die Gesetze von Energie- und Impulserhaltung gegründete Darstellung im wesentlichen erfaßt werden. Eine solche stoßmechanische Darstellung verlangt hinsichtlich der übertragbaren Energien grundsätzliche Verschiedenheit zwischen der Sekundärelektronenauslösung durch Wasserstoffkerne und der Sekundärelektronenauslösung durch Elektronen. Während nämlich ein zentral stoßendes Elektron in Übereinstimmung mit dem Experiment¹⁾ an das Sekundärelektron seine volle Energie verlieren kann, da stoßendes und gestoßenes Teilchen gleiche Masse besitzen, muß im Gegensatz dazu erwartet werden, daß der schwere Wasserstoffkern auch bei direktem Stoß nur einen kleinen Bruchteil seiner Energie

1) O. Klemperer, *Ann. d. Phys.* [5] **3**, S. 849. 1929. u. M. Renninger, *Ann. d. Phys.* [5] **9**, S. 295. 1931.

dem Elektron abgibt. Dieser Energiebetrag ist theoretisch bestimmt durch die Gleichung $Q = 2 M v_0^2$, wobei M die Masse des Elektrons und v_0 die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen bedeutet; er ist also etwa gleich dem 450. Teil der Kanalstrahlenenergie. Da er bei zentralem Stoß übertragen wird, darf er nur von Elektronen mitgeführt werden, die in Stoßrichtung weiterfliegen. Wäre das Sekundärelektron um den Winkel φ von der Stoßrichtung abgelenkt, so hätte es eine Energie gleich der höchsten übertragbaren Energie, multipliziert mit dem Kosinusquadrat des Ablenkungswinkels φ . Um die Maximalenergie, die den Bereich der übertragbaren Energien abgrenzt, experimentell abschätzen zu können, mußten also die senkrecht aus der Folie, d. h. in Stoßrichtung der Kanalstrahlen austretenden Sekundärelektronen auf ihre Geschwindigkeit untersucht werden.¹⁾ Die Meßergebnisse seien hier mitgeteilt.

Tabelle 1 (zu Fig. 9)

Sekundärelektronenzahl Z

Volt- geschw.	Au 23 kV		Al 23 kV	
	80 μ	30 μ	80 μ	30 μ
3	65	38	7	10
8	200	72	—	—
12	—	—	29	—
15	184	80	24	18
30	145	91	17	25
50	—	96	—	—
60	50	83	11	17
80	10	44	7	10
100	—	10	—	5,5
120	—	3	—	—

Tabelle 2 (zu Fig. 10)

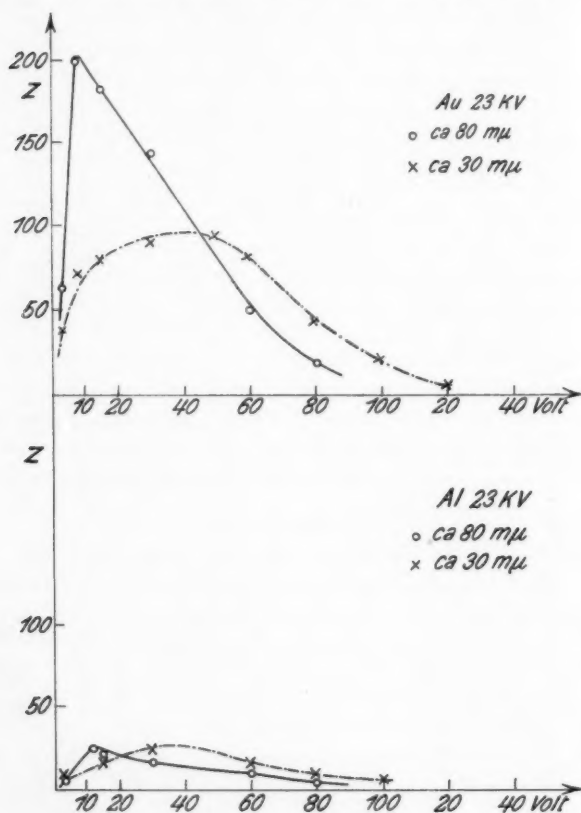
Sekundärelektronenzahl Z aus Al

Volt- geschw.	23 kV		53 kV	
	80 μ	30 μ	80 μ	30 μ
3	7	10	3,5	—
8	—	—	7	1,5
12	29	—	—	—
15	24	18	—	4
20	—	—	9,5	—
30	17	25	11	9
60	11	17	7,5	12
80	7	10	—	8
100	2	5,5	4	5
120	0,5	1	2,5	2,5
140	—	—	—	1,3

Fig. 9 und Tab. 1 zeigen die beobachtete Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärelektronen für Gold- und Aluminiumfolien bei gleicher Kanalstrahlenenergie, aber verschiedenen

1) Wenn Füchtbauer und Baerwald für die Sekundärelektronen, die an der Vorderseite einer massiven Metallplatte austraten, eine höchste überhaupt vorkommende Energie von 27—30 Volt bzw. 22 Volt feststellten, so liegt, wie schon in der Einleitung gesagt wurde, der Grund darin, daß die austretenden Elektronen durch Streuung Geschwindigkeitsverluste erlitten hatten.

Foliendicken. Fig. 10 und Tab. 2 zeigen die Geschwindigkeitsverteilung für Aluminium bei verschiedenen Kanalstrahlenenergien und verschiedenen Foliendicken. Die Abhängigkeit der Elek-

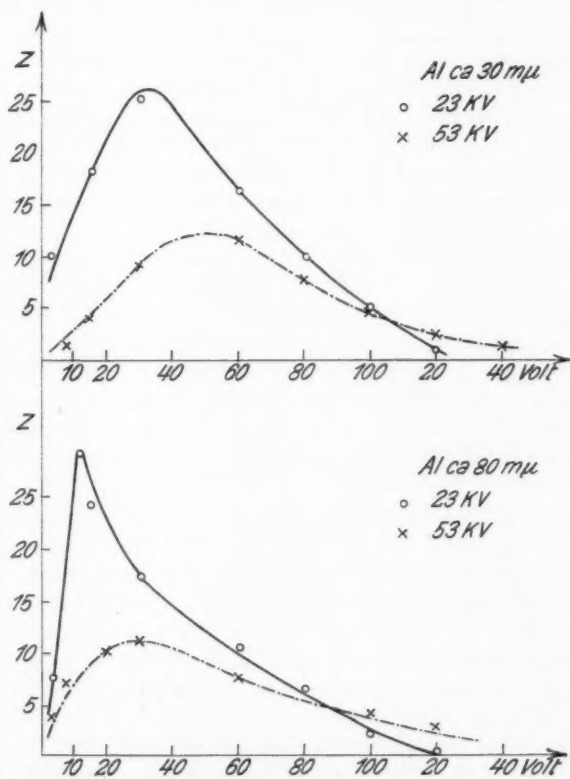


Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärelektronen aus Gold- und Aluminiumfolien bei gleicher Kanalstrahlenprimärenergie

Fig. 9

tronen-Geschwindigkeitsverteilung von der Kanalstrahlenenergie bei Gold ist aus Tab. 3 ersichtlich. Da diese Abhängigkeit qualitativ den bei Aluminium gemachten Beobachtungen ent-

spricht, wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit von einer besonderen Kurvendarstellung abgesehen. Die Teilchenzahl Z , die in den Figg. 9 und 10 als Ordinate aufgetragen ist, wurde bei allen Kurven auf gleiche Kanalstrahlenprimärintensität



Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärelektronen
aus Aluminiumfolien bei verschiedenen Kanalstrahlenprimärenergien

Fig. 10

(etwa 10^{10} H-Teilchen) bezogen, so daß also die Zahlen in Figg. 9 und 10 direkt miteinander verglichen werden können. Die Messungen wurden jeweils an vier Folien von gleicher Dicke

Tabelle 3

Geschwindigkeitsverteilung der Sekundärelektronen aus Goldfolien bei verschiedenen Kanalstrahlenprimärenergien. Sekundärelektronenzahl aus Au

Volt- geschwindigkeit	23 kV	53 kV
	30 m μ	30 m μ
15	80	21
30	91	36
50	96	59
60	83	65
80	44	40
100	10	12
120	3	7

(vgl. Kapitel 8) ausgeführt. Die in den Tabellen bzw. Kurven mitgeteilten Zahlen sind die Mittelwerte dieser Messungen.

Ein genauer quantitativer Vergleich der Meßergebnisse mit den stoßmechanischen Überlegungen ist natürlich nicht zulässig, da er nur unter der Voraussetzung völlig freier und ruhender Elektronen im Atom möglich wäre. Aus Fig. 9 und 10 bzw. Tab. 1, 2 und 3 geht jedoch deutlich hervor, daß die beim Kanalstrahlenstoß übertragbaren Energien sich tatsächlich in der theoretisch zu erwartenden Größenordnung bewegen, also im günstigsten, statistisch sehr seltenen Falle (vgl. Tab. 4) weniger als 1/100 der Primärenergie betragen.¹⁾

Gleichzeitig zeigen die Versuche zum erstenmal in eindeutiger Weise, daß beim Stoß von Wasserstoffkanalstrahlen mit Voltgeschwindigkeiten zwischen 23 und 53 kV noch Energiebeträge von 100—200 Volt auf das gestoßene Elektron übertragen werden können. Diese höchsten Energiebeträge sind in Übereinstimmung mit den Beobachtungen, die Gerthsen²⁾ anlässlich des Auftretens zweifach positiver Heliumkerne beim Durchgang von Heliumkanalstrahlen durch Materie machte,

1) Man kann annehmen, daß die schnellsten Sekundärelektronen, die bei der 30 m μ starken Aluminiumfolie beobachtet wurden, durch Kanalstrahlen mit voller Primärenergie ausgelöst worden sind, da Becker (A. Becker, Ann. d. Phys. [5] 2. S. 249. 1929) bei Messungen an einer 40 m μ starken Nickelfolie gefunden hat, daß Elektronen mit weniger als 100 Volt Geschwindigkeit ohne wesentliche Geschwindigkeitsverluste durch die Folie hindurchgehen können.

2) Chr. Gerthsen, Phys. Ztschr. 31. S. 948. 1930.

etwas größer, als die elementare Darstellung des Stoßprozesses zuläßt.

Das aus Figg. 9 und 10 bzw. den Tabbl. 1, 2 und 3 ersichtliche Auftreten von Elektronen mit den verschiedensten Geschwindigkeiten trotz definiertem Austrittswinkel ist in folgender Weise zu deuten:

Da die Elektronen im Atom nicht als frei und ruhend zu betrachten sind, werden nicht allein Sekundärelektronen mit den theoretisch zu erwartenden Energien in Stoßrichtung der Kanalstrahlen, also senkrecht, aus der Folie austreten. Nimmt man an, daß infolge der Bindung der Elektronen im Atom ein Teil des Impulses auf das gesamte Atomsystem übergehen kann, so müssen auch Sekundärelektronen mit Energiebeträgen ausgelöst werden, die größer sind als der 450. Teil der Kanalstrahlenenergie.

Zu dieser im Einzelprozeß begründeten Geschwindigkeitsverteilung kommen noch verschiedene andere Erscheinungen hinzu, die das Auftreten langsamer Elektronen bedingen. Diese Erscheinungen sind a) die Streuung und die Geschwindigkeitsverluste der Sekundärelektronen, b) die Richtungsänderung der Kanalstrahlen und c) die Geschwindigkeitsverluste der Kanalstrahlen.

a) Es wird unter den senkrecht aus der Folie austretenden Elektronen auch solche geben, die zwar mehrfach gestreut wurden und doch die Folie zufällig annähernd senkrecht verlassen. Bei Streuung an Elektronen werden sie Geschwindigkeitsverluste erlitten haben.

b) Ein Teil der Kanalstrahlen wird beim Durchgang durch die Folie durch Streuung eine Richtungsänderung erfahren. Infolgedessen wird es Sekundärelektronen geben, die zwar senkrecht aus der Folie austreten, aber nur einen Bruchteil der maximal möglichen Stoßenergie mit sich führen.

c) Die Kanalstrahlen erfahren beim Durchgang durch die Folie Geschwindigkeitsverluste, so daß schon allein aus diesem Grunde die Energie der senkrecht austretenden Sekundärelektronen variieren muß. Daß die Geschwindigkeitsänderungen einen merklichen Einfluß haben können, wurde durch einen besonderen Versuch gezeigt, bei dem die in einem Magnetfeld homogenisierten Kanalstrahlen nach Durchgang durch eine

30 $m\mu$ starke Aluminiumfolie in einem zweiten Magnetfeld auf ihre Geschwindigkeitsverteilung untersucht wurden.¹⁾ Es zeigte sich, daß der größere Teil der Kanalstrahlen nach Verlassen der Folie bei einer Primärenergie von 23—53 kV Geschwindigkeitsverluste von etwa 6—10 kV erlitten hatte; aber auch Kanalstrahlen mit geringeren und höheren Geschwindigkeitsverlusten wurden beobachtet.

Trotz der Verschleierung, die die Stoßvorgänge durch die eben beschriebenen Erscheinungen erleiden, können aus den charakteristischen Änderungen der Meßkurven bei wechselnder Foliendicke und wechselnder Kanalstrahlenenergie einige für das Verständnis des Stoßvorgangs wichtige Schlüsse gezogen werden.

Aus Fig. 9 wird sowohl für Gold, wie für Aluminium deutlich, daß bei großen Foliendicken von 80 $m\mu$ die Zahl der langsamen Elektronen überwiegt, während bei den dünneren 30 $m\mu$ starken Folien der Schwerpunkt nach den schnelleren Elektronen zu verschoben ist. Dies ist verständlich, wenn man annimmt, daß in der dünnen Folie die Kanalstrahlen einen geringeren Geschwindigkeitsverlust erleiden und daher die übertragene Energie anwächst. Außerdem tritt in der dünnen Folie der Einfluß der Streuung von Kanalstrahlen und Sekundärelektronen zurück.

Vergleichen wir bei dicken Folien die Lage der Maxima, so zeigt sich, daß offenbar bei Aluminium das Maximum bei höheren Geschwindigkeiten liegt, als bei Gold. Dies erklärt sich daraus, daß die Kanalstrahlen in der Goldfolie stärker gestreut werden als in der Aluminiumfolie. Bei dünnen Folien ist eine solche Abhängigkeit des Maximums von der Ordnungszahl vermutlich deshalb nicht zu erkennen, weil sich hier schon leicht kleine Inhomogenitäten der Folien störend bemerkbar machen. Waren nämlich die Metallfolien nicht völlig homogen, sondern von feinen dickeren Adern durchzogen, wie sie sich leicht beim Auffangen auf dem Folienshalter bildeten, so lag auch bei dünnen Folien das Maximum bei kleinen Geschwindigkeiten.

Wie die Änderung der Kanalstrahlenenergie durch Geschwindigkeitsverluste in der Folie, so bedingt auch die Än-

1) A. Eckardt, Ann. d. Phys. [5] 5. S. 401. 1930.

derung der primären Kanalstrahlenenergie eine Änderung der Kurvenform. Aus Fig. 10 geht hervor, daß sich bei dicker und dünner Folie die Maxima mit wachsender Primärenergie der Kanalstrahlen annähernd im Verhältnis der Voltgeschwindigkeiten zu höheren Sekundärelektronen-Energien verschieben. Die Zahl der Sekundärelektronen mit hohen Geschwindigkeiten nimmt auch hier wieder mit steigender Kanalstrahlenenergie zu, während die Zahl der langsamen Elektronen kleiner wird. Dies ist stoßtheoretisch so vorstellbar, daß bei hoher Kanalstrahlenenergie weniger Kanalstrahlen gestreut und höhere Energien auf die Sekundärelektronen übertragen werden.

Tab. 4 gibt für verschiedene Kanalstrahlenenergien an, wieviel Wasserstoffatome auf eine 30 $m\mu$ dicke Gold- und Aluminiumfolie auftreffen mußten, damit an der Folienrückseite ein Elektron von bestimmter hoher Geschwindigkeit annähernd senkrecht in der Kanalstrahlenrichtung austrat.¹⁾

Tabelle 4

Zahl der auftreffenden H^+ -Atome bei einem austretenden Elektron

KS-Energie	Au 30 $m\mu$			Al 30 $m\mu$		
	80 V	100 V	120 V	80 V	100 V	120 V Voltgeschw.
23 kV	etwa $2 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^{10}$
53 kV	„ $2 \cdot 10^8$	$8 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^9$

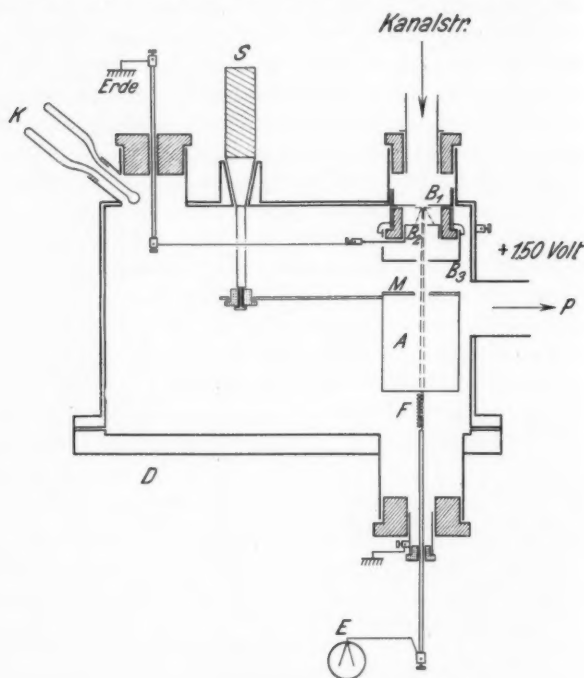
Fig. 9 zeigt, daß für Gold vermutlich auf Grund der größeren Zahl von Elektronen im Goldatom das Sekundärstrahlungsvermögen etwa viermal so groß gemessen wurde, wie das von Aluminium.

12. Methode zur Bestimmung der aus massiven Metallplatten austretenden Sekundärelektronen

Es schien im Rahmen dieser Arbeit interessant, auch die Zahl der Sekundärelektronen zu bestimmen, die beim Aufprall eines homogenen Kanalstrahlenbündels aus einer massiven Metallplatte austreten. Die in Kapitel 2 beschriebene Meßkammer war für die Versuche in der aus Fig. 11 ersichtlichen Weise umgebaut.

1) Wie schon in Kapitel 5 bemerkt wurde, gelten die in der Tabelle mitgeteilten Zahlen für einen Elektronengeschwindigkeitsbereich von ± 2 Proz. der angegebenen Geschwindigkeit.

Die Kanalstrahlen durchsetzten zuerst die Aluminiumblende B_1 von 0,5 mm Durchmesser. Die an den Rändern dieser Blende ausgelösten Sekundärelektronen wurden durch ein elektrisches Feld zwischen B_1 und B_2 nach B_1 zurückgebogen. B_2 selbst, sowie die Blende B_3 hatten Öffnungen



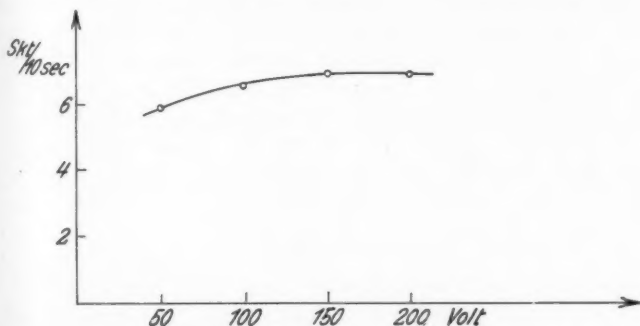
Meßkammer

Fig. 11

von 2 bzw. 3 mm, so daß die Kanalstrahlen frei hindurchtreten konnten und eine Auslösung von Sekundärelektronen an diesen Blenden unmöglich war. Nach Durchsetzen der Blenden gelangten die Kanalstrahlen in den als Faradaykäfig ausgebildeten Auffänger A , der eine Öffnung von 3 mm Durchmesser besaß. Er war an dem Schliff S durch Bernstein isoliert angebracht und durch eine kleine Kupferdrahtfeder F

und eine ebenfalls mit Bernstein isolierte Durchführung mit dem Paschenelektrometer E verbunden.

Es erschien zunächst von Wichtigkeit, festzustellen, ob die an B_1 ausgelösten Sekundärelektronen die mit dem Elektrometer beobachtete Kanalstrahlenintensität verfälschen konnten. Zu diesem Zweck wurde die mit dem Faradaykäfig beobachtete positive Aufladung als Funktion der elektrischen Feldstärke zwischen B_1 und B_2 bestimmt. Fig. 12 gibt eine Meßkurve wieder und zeigt, daß bei kleinen Feldern in der Tat die positive Aufladung durch hinzukommende Sekundärelektronen



Zunahme der beobachteten Kanalstrahlenintensität durch Zurückhalten der an B_1 ausgelösten Sekundärelektronen

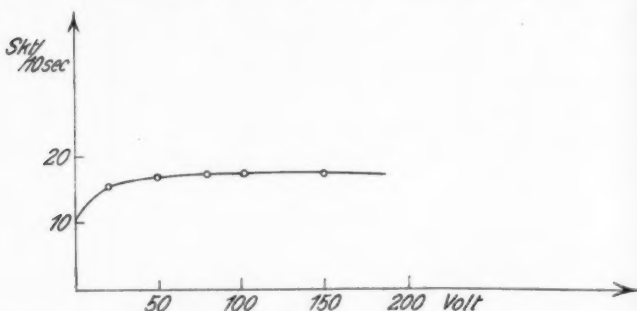
Fig. 12

vermindert wurde. Erst bei Spannungen von mehr als 150 Volt machte sich kein Einfluß der Elektronen auf die beobachtete Ladung mehr bemerkbar.

Es war ferner von Wichtigkeit, Klarheit darüber zu gewinnen, ob an der Vorderwand M des Käfigs Sekundärelektronen in merklicher Zahl durch diffuse Kanalstrahlen ausgelöst wurden, denn das Austreten solcher Elektronen würde die Kanalstrahlenintensität zu groß erscheinen lassen. Man konnte sich von dem Fehlen eines derartigen Störeffektes überzeugen, indem man nacheinander die Blende B_3 und die mit ihr verbundene gesamte Meßkammer auf + 150 Volt, dann auf - 150 Volt gegen die Käfigstirnwand M auflud, wobei das Potential der Blende B_3 jeweils um 150 Volt tiefer als das

der Umgebung war. Die Aufladung des Käfigs wurde in keiner Weise von der Feldrichtung beeinflusst. Diese Beobachtung zeigt außerdem, daß in der Meßkammer bei sorgfältiger Kühlung mit flüssiger Luft keine störende Ionisation durch die Kanalstrahlen stattfand.

Nach Messung der Kanalstrahlenintensität wurde der Auffänger mittels des Schiffs *S* etwas zur Seite gedreht, so daß jetzt die Kanalstrahlen auf die sorgfältig polierte und mit einer dicken Schicht des zu untersuchenden Metalls bedampfte Stirnwand *M* trafen. Um okkludierte Gase aus dem Metall zu entfernen, wurde die betreffende Stelle der Schicht



Zunahme der beobachteten Sekundärelektronenintensität bei positiver Aufladung von B_3 und Meßkammer

Fig. 13

jeweils vor Beginn der Messung 45 Minuten lang mit Kanalstrahlen beschossen. Längere Beschießung bis zu 2 Stunden hatte keinen Einfluß mehr auf die Meßresultate. Irgendwelche sichtbaren Veränderungen der Metalloberfläche infolge der Beschießung wurden nie beobachtet.

Aus Fig. 13 geht hervor, daß bei positiver Aufladung der Blende B_3 und der Meßkammer eine Potentialdifferenz von 80 Volt nötig war, um sämtliche an der Stirnwand *M* ausgelösten Sekundärelektronen vom Auffänger wegzuziehen. Es wurde also bei 150 Volt eine Aufladung beobachtet, die sich aus der Intensität der Kanalstrahlen und der durch den Austritt der Sekundärelektronen bedingten positiven Aufladung zusammensetzte. Die Reflexion von Kanalstrahlen an der

Stirnwand M spielte dabei keine merkliche Rolle, denn bei negativer Aufladung der Blende B_3 , wie sie zur Messung der austretenden Sekundärelektronen nötig war, wurden die durch reflektierte Kanalstrahlen an B_3 ausgelösten Sekundärelektronen dort zurückgehalten. Eine Korrektur bezüglich der reflektierten Kanalstrahlen selbst erübrigte sich, da $\frac{2}{3}$ von ihnen nach der Reflexion als neutral zu betrachten sind und die gesamte Reflexion bei Gold nur etwa 10 Proz. der auftreffenden Intensität beträgt.¹⁾ Auch eine wesentliche Beeinflussung der Meßresultate durch neutrale auftreffende Kanalstrahlen war nicht zu befürchten, da bei den guten Vakuumverhältnissen entsprechend den Angaben von Bartels²⁾ das Kanalstrahlenbündel nur sehr wenig neutrale Teilchen enthielt. Die Richtigkeit dieser Feststellung wurde dadurch bestätigt, daß ein unmittelbar vor der Meßkammer angebrachter starker Hufeisenmagnet keine Kanalstrahlen mehr auf die Metallplatte M auftreffen und somit keine Sekundärelektronen dort in meßbarer Zahl austreten ließ.

13. Ergebnisse

Fig. 14 und Tab. 5 zeigen, daß aus einer dicken Aluminium-, Kupfer- und Goldschicht annähernd gleichviel Sekundärelektronen,

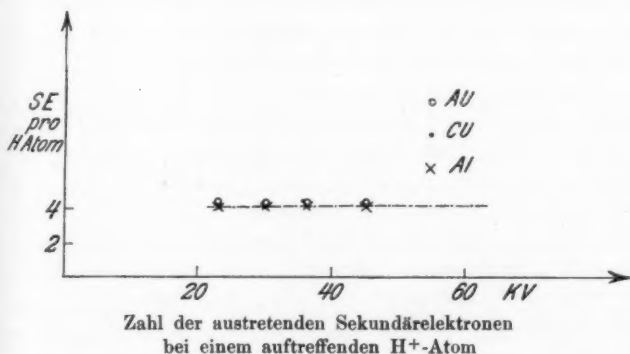


Fig. 14

1) Chr. Gerthsen, Ann. d. Phys. 85. S. 881. 1928.

2) H. Bartels, Ann. d. Phys. 6 S. 957. 1930.

Tabelle 5 (zu Fig. 14)

Zahl der austretenden Sekundärelektronen bei einem auftreffenden H^+ -Atom

KS-Energie	Al	Cu	Au
23	4,2	4,3	4,6
30	4,1	4,2	4,4
37	4,1	4,3	4,4
46	4,1	4,3	4,5

nämlich rund 4 Sekundärelektronen, bei einem auftreffenden Wasserstoffkern austraten. Im Gegensatz zu den Messungen von Campbell¹⁾ blieb dieser Wert in dem untersuchten Bereich zwischen 24 und 46 kV unabhängig von der Energie der Kanalstrahlen. Ein Vergleich der vorliegenden Ergebnisse mit den Messungen Campbells ist jedoch deshalb nicht zulässig, weil man heute weiß, daß aus einem positiv aufgeladenen Glühdraht, wie ihn Campbell benützte, nicht nur Protonen, sondern in überwiegender Zahl andere Ionenarten austreten. Auch die Untersuchungen von Füchtbauer²⁾ und Saxén³⁾ unterscheiden sich von den hier angegebenen Versuchen, da sie mit einem unaufgelösten Kanalstrahlenbündel gemacht worden waren. Bei der magnetischen Auflösung des Kanalstrahlenbündels konnten nur H-Teilchen auf die Metallplatte gelangen, so daß die Verschleierung der Metalleigentümlichkeiten durch eine entstehende Verunreinigung ausgeschlossen war.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß durch Reflexion der Kanalstrahlen die Meßergebnisse vollständig entstellt werden können, wenn zur Messung der Kanalstrahlenintensität nicht, wie im vorliegenden Fall, ein Käfig verwendet wird. Ließ man nämlich bei seitwärts gedrehtem Auffänger die Kanalstrahlen auf die Stirnwand des Käfigs auftreffen und bestimmte jetzt die Kanalstrahlenintensität, während die ausgelösten Sekundärelektronen durch hohe negative Aufladung von B_3 und Meßkammer zurückgehalten wurden, so fand man zwar

1) N. Campbell, Phil. Mag. **29**. S. 783. 1915.

2) Ch. Füchtbauer, Phys. Ztschr. **7**. S. 153. 1906.

3) B. Saxén, Ann. d. Phys. **38**. S. 319. 1912.

bei aufgedampftem Aluminium die richtigen Werte, bei aufgedampftem Gold aber Zahlen, die um etwa 35 Proz. zu klein waren. Dies erklärte sich daraus, daß entsprechend den Beobachtungen von Gerthsen¹⁾ an Gold im Vergleich zu Aluminium sehr viele Kanalstrahlen reflektiert wurden und nun an der Blende B_3 Sekundärelektronen auslösten, die durch das elektrische Feld auf den Auffänger gezogen wurden. Wie erwartet werden mußte, nahmen hier die gemessenen Zahlen und damit die Reflexion der Kanalstrahlen mit zunehmender Kanalstrahlenenergie ab. Bei den Wasserstoffmolekülen war die Reflexion und die dadurch auf den Auffänger gelangende Sekundärelektronenzahl so groß, daß statt einer positiven eine schwache negative Aufladung beobachtet wurde.

14. Zusammenfassung

Es wurden die Sekundärelektronen nach Zahl und Geschwindigkeit untersucht, die beim Durchgang von Wasserstoffkanalstrahlen durch dünne Metallfolien aus Aluminium und Gold annähernd in Stoßrichtung der Kanalstrahlen, also senkrecht zur Folie, austraten.

Die Ergebnisse zeigen, daß ein großer Teil der beobachteten Sekundärelektronen die Geschwindigkeit besitzt, welche für den Zusammenstoß zwischen H-Teilchen und Elektron aus den elementaren stoßmechanischen Überlegungen zu erwarten ist. Die Gründe für das Auftreten geringfügiger Abweichungen werden eingehend diskutiert.

Außerdem wurde die Zahl der Sekundärelektronen bestimmt, die bei einem auftreffenden Wasserstoffatom aus einer massiven Metallplatte austraten. Diese Zahl blieb in dem untersuchten Bereich von 23—46 kV unabhängig von der Energie der Kanalstrahlen und dem untersuchten Material.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Tübingen in der Zeit von April 1930 bis Mai 1931 ausgeführt.

1) Chr. Gerthsen, Ann. d. Phys. **85**. S. 881. 1928.

Dem Direktor des Physikalischen Instituts, Hrn. Professor Dr. Geiger, möchte ich an dieser Stelle für sein förderndes Interesse an meiner Arbeit herzlich danken. Zu ganz besonderem Dank bin ich Hrn. Privatdozent Dr. Gerthsen verpflichtet, der die Anregung zu dieser Arbeit gab und mir seine wertvolle Hilfe jederzeit gerne zuteil werden ließ.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden im wesentlichen mit Apparaten ausgeführt, die Hrn. Professor Dr. Geiger von dem Elektrophysikausschuß der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft zur Verfügung gestellt worden waren.

(Eingegangen 17. Juli 1931)

r
s
-
-
r
n
n
n